吐嘈學數學：勇敢面對教改的數學普及作品

洪萬生
台灣師範大學數學系

書名：吐嘈學數學：**16** 堂課讓你擁有數學腦！
作者：新井紀子 **(Arai Noriko)**
中譯者：陳嫻若
出版社：如果出版社，台北市
出版年份：**2009**
出版資料：平裝 **219** 頁，定價 **260** 元
國際書碼：**ISBN 978-986-6702-41-9**

一、前言

這是「本來害怕」數學的數學家撰寫的一本數學普及作品！作者新井紀子原來主修法律（一橋大學法學系畢業），後來，前往美國伊利諾大學數學系攻讀博士，才成為數學家。[1]目前，她是日本國立情報學研究所和東京工業大學的教授，也是日本廣受歡迎的數學推廣教師。

其實，一開始吸引我閱讀本書的原因，是作者引言中的問題 **1** 及其回答（問

[1] 美國高等教育制度的彈性，由此可見一斑。如果新井紀子留在日本或選擇其他亞洲國家深造，她應該不會被任何大學的數學系所接受，更不必說有機會攻讀博士學位。

題 **2**)。問題 **1** 如下：

圓周率是什麼？

首先請用「圓周率是什麼……」的方式寫下它的定義，然後再根據這個定義，有條理地解釋圓周率從 3. 開始的原因。

針對這個問題，作者調查了下列五個族群的回答：

1. **國中一年級**
2. **明星高中一年級**
3. **明星大學一年級**
4. **政府裡的高級官員**
5. **報社記者**

看看哪一個族群的答對率不到一成，結果，她赫然發現：**1** 到 **5** 都是正確答案！

這個與教育或學習成效有關的現象，在我們這個社會應該也會類似地出現，儘管某些明星高中或大學的教師必然不無委屈地說：可是我們榮獲很多 **IMO**（國際數學奧林匹亞）獎牌呢！

與其「辯解」，不如打開這本書，看看本書作者如何「吐嘈」吧！

二、內容簡介

本書除了「**上課之前：說起來，『那個』到底是什麼？**」（代前言）外，共有十六堂課，依序如下：

第 1 堂課 教外星人學乘法 － 對了，什麼叫做乘法？

第 2 堂課 檢查數學的結構 － 「貸款」×「貸款」＝

第 3 堂課 俳句的可能性無限大？ － 無限是什麼樣的數？

第 4 堂課 成為億萬富翁的方法 － 可能性與機率

第 5 堂課 國語與數學的深刻關係 － 課本上沒教的除法

第 6 堂課 數線是條奇怪的線（上）－ 0.999…＝1？怎麼可能？

第 7 堂課 數線是條奇怪的線（下）－ 數線上的數有什麼特性？

第 8 堂課 四角形是什麼東西？－ 尋找四角形

第 9 堂課 定義遊戲 － 為了向極端的白痴解釋

第 10 堂課 乘法的筆算為什麼正確？－ 養成估計的習慣

第 11 堂課 累乘的可怕與有趣 － 計算祖先的人數

第 12 堂課 這個圖、那個圖，到底是什麼圖？－ 用「對」來表示「關係」的東西

第 13 堂課 不能計算的函數 － 就算寫成算式，也不見得就能計算

第 14 堂課 大家最討厭的三角函數（上）－ 就是螞蟻繞圈圈到達那裡嘛！

第 15 堂課 大家最討厭的三角函數（下）－ 只要用加法和乘法就能計算函數

第 16 堂課 向博士熱愛的算式挑戰

以及代結語的「最後一堂課」：

數學讓我們明白的事 — 邏輯的極限 — 那，怎麼辦？

本書除了作者所扮演的教師角色之外，還包括三位小學生和一隻章魚，他們都以漫畫形式表現，其中三位學生只畫出頭部。更值得注意的，他們都沒有名字，顯然，作者認爲本書所提出的是些普遍存在的問題，絕大部分的學生之相關學習經驗應該類似，因此，創造某甲等角色，方便對話就是了。

作者在「上課之前」所舉的很多例題，都用以說明本書的主旨，就是教大家鍛鍊「定義」和提出「爲什麼」的能力。她強調「當人們意氣相投，聚集起來往相同目標前進時，就不需要『定義』和『為什麼』，因為大家不用解釋就能心意相通，沒有對立。然而，如果彼此利害關係不同，朝不同方向前進時，不把一些問題解釋清楚，就會無法相處。」此時，「定義」就變得十分重要，而且通過「爲什麼」的提問，也可以幫助我們釐清定義的內涵。

這就解釋了何以作者在本書中十分強調「吐嘈」的重要性。（按「吐嘈」是日本相聲中的一個角色。）如此說來，這種作法好像跟教育改革所強調的與生活經驗連結背道而馳。不過，作者也承認「用日常的直覺來定義，其實並不是什麼壞事。只是，完全由直覺產生定義，就會出差錯。對於直覺的定義，不斷反覆地用邏輯來『吐嘈』，最後才能完成嚴密、沒差錯的定義。」（頁 **114**）於是，作者在第 **9** 堂課特別安排「定義遊戲」，也就十分容易理解了。

現在，我們回頭來看這 **16** 堂課的內容。

第 **1** 堂課介紹乘法，目標是教外星人學乘法。如此一來，把乘法的原理說清楚，從而說明擴張的數之乘法運算規則，其中掌握乘法的「特性」當然十分重要，而這當然來自乘法的定義。不過，作者也指出：「可以自由定義的定義中，有些很有名，課本上也有但有些被人忘記了。為什麼會有這麼大的差別呢？主要還是這些定義是否具有產生豐富、真實世界的力量，來吸引其他數學家。」因此，「『只有最自然的東西能留下來』，如果從這個意義來看，數學的定義的確跟大自然很像，曲高和寡就會被淘汰。」

現在，「除了懂得如何計算，又能說明乘法是什麼之後就能完全理解乘法是什麼了吧。」這是作者在第 **2** 堂課所拋出來的問題，她的目的，無非是強調數學結構的重要性，這是因爲「有了定義並不是一定就能計算。而有了算式的計算，也並不保證它自動產生意義。」於是，作者提出了十個有關日常生活的「**yes** 或 **no**」的問題，譬如「特地走遠路到傳說『很便宜』的超市，結果走太累，在外面吃完飯才回家」，以便測試一般人是否習慣運用國中數學以上的「邏輯思維」。爲了進一步說明，作者指出：

> 數學裡討論的概念中，許多並不實際存在。但是，凡是接受過邏輯思考訓練的人，儘管有不同的文化或年齡，大多能到達幾乎同樣的印象。只靠邏輯，就能不斷地思考「因此」、「為什麼」、「如何做」等概念，並且與大家共通。這就是數學最大的特點。

同時，

> 對無形的事物思考「所以」、「為什麼」、「怎麼做」的能力，在每天的生活中，

好像不太重要，所以進行這類訓練的人也不太多。可是，如果我們看到無形的事物，像是權利、風險、未來，卻無法思考「所以」、「為什麼」、「怎麼做」的話，這社會就很難達到「幸福」的水準了。因為，現代社會是個資訊量和選擇性太多的民主社會。

第 **3** 堂課的主題是無限。在第 **3** 堂課中，作者提了如下的問題：

下面的句子，在數學上哪個正確？

(1) 我們的可能性無限大！

(2) 徘句有無限的可能性。

(3) 地球上住著無限多生物。

(4) 星星的數量是無限的。

然後，一如前述，運用對話方式，並舉例來說明有限和無限的本質差異。第 **4** 堂課雖然也涉及無限，不過，主題應該是購買彩券的（機率）期望值。

第 **5** 堂課討論數學與語文的關係。在本堂課中，作者以除法計算題爲例，指出：「很多不太會寫應用題的學生，其實是沒有正確讀懂問題的文章，才會失敗的。尤其是理解論說文的能力，跟數學能力有很深的關係。明明是數學的應用題，但還沒算到數學的部份，就在國語的部份摔一跤，豈不是很可惜嗎？」針對這一點，作者還特別舉數列的極限定義（高中三年級課程內容）爲例：

設一 $a_1, a_2, a_3, \ldots$數列，此時，對於任一正數 $\varepsilon>0$，都存在一個 n，而 m 可滿足所有的 $n<m$，則 $|a_m-b|<\varepsilon$ 時，數列 a_m 即向 b 收斂。

並請求讀者靜下心來，仔細看看其數學部份在哪裡？看起來那個絕對值不等式 $|a_m-b|<\varepsilon$ 應該是最關鍵的部份吧？這個不等式當然不難！不過，整體讀起來，這一段敘述卻又像天書一般。爲什麼呢？「那是因為 ε 與 m 和 n 的關係很複雜。若要以『任一』、『存在』、『m 可滿足所有的 $n<m$』的字眼為線索，來理解這些複雜關係的話，就需要相當程度的國語邏輯力。」

其實，這個出自十九世紀柏林學派大師 **Karl Weierstrass** 的極限定義，真正的關鍵是邏輯量詞 **(logical quantifier)** 與邏輯連詞 **(logical connective)** 的使用，而理解所需之能力，當然不能只是歸因數學，語文的恰當素養，恐怕也很重要吧！因此，針對讀者（或學生）可能困惑：

嗯，但是，這種文字也很少在國語課本裡出現嘛。

根本沒有文學性麻。

作者回答說：「它們的確不是文學，但是以學校理所學的科目來說，這部份都算『國語』。所以，最好在國語方面進行必要的訓練。」同時，作者也指出，並不是只有數學家才需要這種訓練：

各位同學長大以後，你知道每天接觸的文章是哪種格式嗎？其實占最多數的就是說明道理的說明文。比如，像是使用說明書或作業順序表，保險的合約書也屬於這一類。那些文章的內容很多都比「數列的收斂」還要複雜的多。如果不能正確明瞭這些文章，很可能操作錯誤而發生意外，也有可能簽下自己不想要的合約。

在第 **6**、**7** 堂課中，主題是數線 **(number line)**。 這條佈滿實數的線，的確相當奇特（其中涉及抽象的無限概念），因此，作者利用兩堂課來講解，當然不令人意外。一開始，作者拋出 **3.999…**（循環小數）是否等於 **4** 的疑惑，然後，

引進實數的「戴德金割切」**(Dedekind cut)** 概念（但未提及此一名稱），緊接著，討論「**0.999…＝1？怎麼可能！**」如果不然，**0.999…**和 **1** 之間，有什麼數呢？有沒有比 **0.999…**大但是比 **1** 小數呢？如果「**我們將數線從 0.999…與 1 之間剪斷時，兩邊就都有端點了呢？因為，這兩個數之間，一個數也沒有，出現了空間。而這一點與數線的特性不合。**」因此，**0.999…**非等於 **1** 不可！由於此一結論極不自然，因此，多數人「**總覺得好像被騙了**」！由此可見，在數學學習過程中，直覺 **vs.** 邏輯所呈現之張力！在第 **7** 堂課中，作者主要目的是介紹實數的分類：有理數與無理數，至於其工具，則是實數的表徵 **(representation)** 如分數或小數。

第 **8** 堂課應該是小學數學教師最感興趣的主題之一：**四邊形是什麼東西？**本堂課一開始，作者即列出十個圖形，讓讀者來辨識哪些是四邊形。順勢引進拓樸學 **(topology)** 的概念，來說明分類的意義。最後，作者指出：

> **用日常的直覺來定義，其實並不是什麼壞事。只是，完全由直覺產生定義，就會出現差錯。對於直覺的定義，不斷反覆地用邏輯來「吐嘈」，最後才能完成嚴密、沒差錯的定義。只是，它的結果又會變得很難接收。數學的文字令人難以接受，的確有它的理由的。**

既然如此，如何向「極端的白痴」解釋遊戲（如九宮格），乃至於運用文字向第一次來日本旅行的外國人，說明正確的澡堂進入方式，就成爲第 **9** 堂課主題了。針對熟悉相關問題的人而言，默契早已建立，說明不是那麼必要，可是，將來「**在工作上遇到的人，大部分都跟你沒有共同的前提，必需常常確認對方是否已經建立共識。所以，這種說明能力就非常重要了。**」

第 **10** 堂課主要說明「乘法的筆算爲什麼正確？」並將它連結到第 **9** 堂課所提及的「程式」。在小學三、四年級學到乘法運算時，通常不需要說明它的所以然之故，但是，上了國中之後，理解其原理當然十分必要。

第 **11** 堂課的引起動機題目是：**計算祖先的人數！**並藉以點出「累乘可怕與有趣」。根據作者的估算，**23** 代以前，也就是鎌倉幕府後半的元寇時期，現代日本人任何一個國民的祖先與日本人口相等，當然，如有表兄妹成婚的情況，人數就會少一些。此外，蝨子也會爆增，這些都是累乘的威力！

第 **12** 堂課的主題是圖形：解釋圖形意義（**用文字來表示圖形、預測圖形的形狀**），並且在函數的脈絡中，說明關係 **(relation)** 的意義。至於目的呢，則顯然是在介紹「**從數據中開發出讀取關係的方法**」。

第 **13** 堂課主題是函數，不能計算的函數！首先，作者要我們回答以下問題：

(1) 請寫出三個你認為馬上可以算得出來的算式，然後實際計算一下。

(2) 請寫出三個你認為要花時間才算得出來的算式，然後花點時間計算一下。

(3) 請寫出三個你認為不能計算的算式，而如果電腦能計算這三個算式，你覺得是為什麼。

然後，她在對話中指出算法（譬如牛頓法）基於「麻煩」而創造的意義。

第 **14**、**15** 堂課主題是「**大家最討厭的三角函數**」。作者指出：一般（日本）人學習數學時，在小學階段感到最困難的，應該是比例，到了國中，主要是函數和組合。至於到了高中，則覺得束手無策的，莫過於三角函數吧。於是，在第 **14** 堂課中，作者運用座標平面上的單位圓之圓周繞行，說明正、餘弦在四個象限之變化。而在第 **15** 堂課中，作者則主要利用函數軟體畫圖，以便觀察正弦函數與其泰勒展開式之逼近。最後，作者呼應第 **1** 堂課提及之阿基米德有關圓之逼近：

這本書剛開始時，我介紹了圓周率從 3.開始的證明。用內側正多邊形的周長與外側正多邊形的周長，來夾擊圓周率的方法，是古希臘阿基米德想出來的方法。但是到泰勒的時代，他發現只用一個公式，就能計算出圓周率 π 。

由第 **15** 堂課最後所引進的正餘弦之泰勒展開式，作者在第 **16** 堂課介紹歐拉公式，亦即《博士熱愛的算式》（作者：小川洋子）中的那個公式。[2]事實上，歐拉曾證明：

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

如將 $x = \pi$ 帶入，即可得到歐拉公式：

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 \text{ 或 } e^{i\pi} + 1 = 0 \text{。}$$

爲此，作者在本堂課中，說明了指數函數 e^x 以及歐拉數 e 的定義，然後，仿照十八世紀的偉大數學家歐拉 **(Euler)**，將人工製造的（虛）數插入實用的算式如正餘弦的泰勒展開式之中，而得到上述公式。讓我們來看看作者的反思吧：

因為泰勒展開式就像一座橋，經由它，不論是 $\sin(ix)$ ，還是 e 的 ix 次方，或是 ix 對數，都能加以定義和計算了。就因為有了泰勒計算式，虛數的世界才能擴展。

但是，泰勒也沒想到自己的式子會被插入虛數吧？

我想應該是吧。可是，這個人工的定義並不是單純成為一個謎就結束了。從這裡開始，歐拉創造出複分析的數學領域，這是近代數學中非常熱門的項目之一，應用在很多學問上。

在實用的泰勒計算方法，插入完全不懂的 i 之後，不僅出現一個完美的算式，而且之後還普遍實用，這就是數學有趣的地方。

所以，這就可以說明 π 或 e 是神賜予我們的特別數。正因為它是這麼特別，才會有這麼美麗的邂逅啊。

在「最後一堂課」中，作者先是利用可列或可數的性質，說明代數數 **(algebraic number)** 與超越數 **(transcendental number)** 的意義，以便與前述的 π 和 e 呼應。不過，作者的真正目的，是企圖說明數學知識的本質，於是，她引述哥德爾不完備定理的意義，強調即使是自然數的本質，我們也無法完全掌握！然而，

引導你看到這個事實而受到打擊的，正式數學的邏輯力。從古代以來，學者一直告訴我們：「人的思考是有極限的」，所以不值得現在才來大驚小怪。而用正確的形式喻示我們這一點的，不是別的，正是數學的工作。

因此，就算人類連「自然數是什麼」都不能完全掌握，那又怎樣！問題是數學中有趣的事早已展開了，「要做？還是不做？選一個吧！我們可沒空在那裡虛耗光陰呢。」

三、評論

本書是極適合國、高中學生當成具有挑戰性的一本普及讀物。當然，本書「以問題引導討論」的敘述，相當不同於教科書與參考書的進路，因此，不能視之為一般的解題書籍。不過，對於中學生或一般讀者而言，閱讀本書的心理準備，大概喜歡思考就可以了，而這當然需要一點點數學的成熟度 **(maturity)**，能夠進行起碼的反思，儘管正如同本書作者一樣，數學可能曾經是最害怕的學科之一。

[2] 請參考本欄單維彰，〈記憶著愛情的數學等式〉。

本書非常強調精確定義的重要性，對作者而言，此一要求與邏輯思維息息相關，雖然在直覺面向上，數學與日常生活經驗的連結十分必要，然而，唯有運用抽象的邏輯思維，我們才有能力面對既開闊又深刻的數學世界。如此一來，我們也才能體會歐拉公式及其相關理論的「無用之爲大用」！又，此一需求也將語文能力列爲必要條件，值得推廣閱讀活動的中小學教師參考借鏡。

另一方面，本書作者也從邏輯思維切入，引述哥德爾不完備定理之內涵，而觸及數學（史）最深刻的邏輯 **vs.** 意義 **(logic vs. meaning)** 的議題。不過，限於本書之題旨與體例，作者未能盡情發揮，只能點到爲止，實在令人意猶未盡。

再者，本書之論述前後呼應，首尾一貫，全書因而有了整體結構，不過，如果作者能在本書緒論「**上課之前**」稍加說明本書之結構，則對讀者的閱讀當能發揮更大的效用。針對這一點，希望推薦本書給學生閱讀的老師，能在事先花一點時間，將自己的反思與學生分享。

總之，這本法學系出身而且曾經害怕數學的數學家所寫的數學普及書籍，絕對值得細心閱讀！

優秀數學科普作品的指標

評價方式：指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

1.知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)

- **(1) 認識論面向** ☆☆☆☆
- **(2) 方法論面向：**☆☆☆☆
- **(3) 歷史或演化面向：**☆☆
- **(4) 哲學面向：**☆☆
- **(5) 教育改革面向：**☆☆☆
- **(6) 與自然科學、人文社會乃至生活經驗的連結：**☆☆☆☆

2.形式或表達 (Form or representation)

- **(1) 創新手法：**☆☆☆☆
- **(2) 數學知識的洞察力：**☆☆☆☆
- **(3) 歷史事實的洞察力：**☆☆
- **(4) 異文化的啟蒙意義：不適用**
- **(5) 忠實可靠的參考文獻：不適用**
- **(6) 敘事的趣味性、可及性與一貫性：** ☆☆☆☆
- **(7) 中譯本的品質（若需要）：**☆☆☆☆

3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form)

- **(1) 青少年層次：** ☆☆☆☆
- **(2) 一般社會大眾：**☆☆☆☆

4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage)：

0.999…＝1，這種說法太不自然了啦。

的確沒錯。但是，這就是邏輯性的結論。

在數學中，當「無限」這個觀念出現的當下，就開始產生很多奇怪的事。那是因爲我們生活在有限的世界裡。就像第 **3** 堂課時說的，「無限的可能性」是一種語言上的表現，實際上，我們指的不過是「有非常非常可能性」。

好，既然如此，無限這個東西，到底在哪裡呢？有人說無限只是從邏輯中孕育出的想像產物這其實也沒錯。無限並不是存在於我們的生活之外，而是存在於我們的頭腦中、邏輯中。

在無限的世界裡，我們日常的直覺幾乎完全行不通，只有靠著邏輯才能不斷前進。我們看到 **3.999…**與 **4**，日常的直覺會認爲「最前面的數是和 **4**，所以一定是 **3.999…<4**」。但是，這樣做的話，邏輯所建築的數的世界就會崩解了。爲了解救數的世界，**3.999…**一定得等於 **4**，別無他法。可以說，過去的數學家就是靠著這個想法，走進無限的世界的。（頁 **100**）

用日常的直覺來定義，其實並不是什麼壞事。只是，完全由直覺產生定義，就會出現差錯。對於直覺的定義，不斷反覆地用邏輯來「吐嘈」，最後才能完成嚴密、沒差錯的定義。只是，它的結果又會變得很難接收。數學的文字令人難以接受，的確有它的理由的。（頁 **104**）