

推介《數學恩仇錄》

洪萬生

台灣師範大學數學系

書名：數學恩仇錄 (Great Feuds in Mathematics: Ten of the Liveliest Disputes Ever)

作者：哈爾·赫爾曼 (Hal Hellman)

中譯者：范偉

出版社：台北市博雅書屋

出版年份：2009

出版資料：平裝共 364 頁，定價 350 元

國際書碼：ISBN 978-986-6614-27-9



本書作者是歷史上的科技爭端書寫專家，除了本書之外，他還有下列作品：《科學中的大爭端》、《醫學中的大爭端》和《技術中的大爭端》等書。他是一位科普作家，文章散見美國主流媒體如《紐約時報》等，享有相當的聲望，因此，John Wiley 出版社才會動邀請他撰寫本書。為此，他顯然做足了功課，包括有系統地閱讀數學史著述，參考第一手文獻，並且發函向數學史家請益等等，無怪乎可以交出本書這一個頗為成功書寫的成績。

在本中譯版的推薦序中，除了我撰寫〈從科技爭議看數學知識成長的意義〉之外，還有蔡炳坤校長的〈我讀《數學恩仇錄》〉—深刻領略了數學理性與感性的

豐富樂章》，以及汪宇的〈數學的江湖恩仇錄〉。

在中譯本問世之前，吳尚潔編輯曾邀請我幫忙審閱，我盡力為之，務求譯文精確之改善。不過，現在看起來，仍然未能盡善盡美，還盼讀者多加指正才是。底下，爲了分享我的閱讀心得，特別轉載拙文〈從科技爭議看數學知識成長的意義〉，希望大家喜歡！

附錄：

從科技爭議看數學知識成長的意義

洪萬生

台灣師範大學數學系

數學史上是否曾經發生革命？在數學史家社群中，有關這一問題之討論可以說是眾說紛紜，莫衷一是。這或許也是本書作者一開始對於是否接受此一書寫委託時，一直猶豫不決的主要原因之一。

是的，如果數學史不斷地見證數學知識的永恆確定性，從而有關它的爭議 (controversy) 無關真理，那麼，數學的恩仇錄大概只好訴諸於「數學家也有一般人的七情六欲」之說法了。

事實上，這也是一般人的看法。無怪乎作者一開始對數學的認識，也難以超越。不過，作者逐步蒐集文獻，並且向數學史家如道本周 (Joseph W. Dauben) 等請教，最後，他爲我們訴說了十個相當有趣的故事，爲某些突破性的數學發展之滄桑，作了極有歷史洞識之註腳，非常值得我們一起來分享。譬如說吧，作者在他的〈緒論〉中，就引述了一個魯本·赫希 (Reuben Hersh) 的有關數學知識風貌的比喻：「數學就像一個出色的餐廳，在前面的用餐區，顧客們享用著乾淨且精心烹製的數學菜餚」，然而，在火熱的廚房中，數學家卻在看起來雜亂無章的環境中，烹調他們的「新知識」。「這種氣氛包含了火爆的脾氣、紊亂不安、失敗與成功。而我們所關注的正是這個餐館的後半部——廚房區。」

換句話說，過程 (process) 是掌握知識本質的一個不可缺少的環節。也因此，科技爭議 (scientific controversy) 所涉及的知識之認知面向，就值得科學史/數學史家的大加關注了。這是因爲目前的數學與科學教學，都由教師提供「正確的」知識，由於是精心烹調的成品，所以，學習者都難以窺探它們如何製造，從而他們通過溯源的「理解」(understanding)，也就大受限制了。

我在此無意凸顯皮亞傑 (Jean Piaget) 所謂的「發生認識論」(genetic epistemology) 之重要性。不過，歷史上的科技爭議所以值得關注，乃是因爲它可以啓發我們思考知識成長（或發展）及其「非後見之明」的過程，並進一步想像另類的可能性。如此看來，所謂的爭議絕對不只是引發人與人之間的「恩仇」而已，更多的時候，由於爭議者彼此擁有的典範之不可通約 (incommensurability of paradigm)，遂出現知識實踐層次上的各說各話，而在最終成就了科學史的豐

富多元圖像。

現在，就讓我們瀏覽本書的十個爭端。

有關三次方程式的公式求解爭議（本書第一章），一般的西方數學通史著述都納為主題之一，尤其打算涵蓋方程式理論的發展史時，更是不容錯過。事實上，這是一個一再「傳頌」的故事，有些史家甚至還指出它如何「見證」十六世紀義大利科學研究的贊助機制。不過，無論當時科學的贊助 (patronage) 實質內容如何，研究成果的優先權之重要性，卻始終如一。

這種關乎優先權的爭議，當然推動了科學的進展。本書第二、三章所提供的，是十七世紀的故事，主角轉換成爲笛卡兒與費馬（兩位都是法國人）、牛頓（英國人）與萊布尼茲（德國人）。後者的爭議涉及微積分發明之優先權論戰，也是數學史上耳熟能詳的經典故事之一，至於前者，則較少人知，在一般的數學史著述中，它也很少受到青睞。不過，正如曾深入研究費馬的數學史家馬霍尼 (Michael Mahoney) 所評論：「歷史上很少有科學爭論能揭示參與者這麼多的個性，也很少有科學爭論，能揭示個人因素對理性論述影響到這個程度。」事實上，費馬與笛卡兒有關解析幾何與光學的爭論，極少涉及優先權，反倒較多地關乎方法論層面的議題，而這當然是被後世譽爲近代哲學之父的笛卡兒，所無法承受的批判，因爲他的成名作正是《方法論》—其中「附錄」《幾何學》也就是他發明的座標幾何。這場爭議的最後得勝者是笛卡兒，然而，他獲益極其有限。相反地，費馬這位失敗者卻被激發鬥志，提出了十分重要的「最短時間原理」，奠定了幾何光學之基礎，並且對數論、機率論以及微積分，都做出了巨大的貢獻。

在前述的科學爭議中，捲入這個是非圈的非法國人扮演了微不足道的角色。然而，在有關誰先發明微積分的優先權之爭議中，被動員的數學家與科學家就上升到「國家級」的規模了，於是，所謂的民族主義，似乎在科學史上有了第一次的操兵機會。其結果是英國贏得了面子，裡子卻輸得精光！根據數學史的研究成果，在牛頓去世的 1727 年到 1843 年發明四元數的漢彌頓 (William R. Hamilton) 現身之前，英國在一百多年之間未曾孕育出偉大的數學家，究其原因，英國數學家堅持不向歐陸學習萊布尼茲式的微積分(包括符號及其應用)，實在難辭其咎！事實上，牛頓先發明了微積分，但相對於萊布尼茲，卻較晚發表。相反地，萊布尼茲較晚發明，卻較早發表。兩人的彼此獨立發明，是科學史上多元發現 (multiple discoveries) 的最佳例證之一。撫今憶往，要是慣於「廉價消費」民族主義的知識份子有一絲絲靈長類的智慧，很多歷史的公案大概都會改寫才是。

現在，讓我們將歷史場景，拉到也介入微積分優先權論戰的瑞士數學家家族伯努利兄弟上（第四章）。這個家族的「數學基因」令人驚異，因爲他們在三代之間，一共出了八位著名的數學家。但不幸地，他們也都表現了罕見的親人之間的互相痛恨，至於其原因則並非爲了王位或遺產繼承，而是爭論譬如誰先解決了最速下降曲線問題，堪稱是歷史上的一大異數。無怪乎本書作者以「史上排名第一的鬩牆之爭」，來形容這種不可思議的「個人恩怨」。這種相當惡質的競爭，當然帶動了微積分及其應用的大幅進展，不過，「代價」看起來實在太大，顯然不

值得推崇。

到了十九世紀，數學雖然愈來愈往抽象化面向發展，然而，它與自然科學之連結，甚至於在方法論方面是否具有共通之處，在英國成爲赫胥黎與數學家之間的爭議要點。赫胥黎在 1870 年代，科學聲望如日中天（他對達爾文演化論的捍衛，贏得了「達爾文的鬥牛犬」之封號），他的演講和著作強烈地警惕英國政府，必須在教育過程中強調科學訓練的重性，因此，他對英國現代科學及其教育之鼓吹，可以說居功甚偉。不過，顯然源自無知與輕率，他認爲「數學家只考慮物體的兩種性質：數量與範圍。所有他想要的歸納，都已經在很多年以前形成和完備了。他現在除了推論和證明之外，無事可作。」對於這樣一個出自科學名流的論調，數學家社群當然必須伺機反擊，而他們找到的合適人選，就是著名的數學家西爾維斯特。至於西爾維斯特所採取的策略，則是指觀察、猜想、歸納、試驗、推理等一般認爲自然科學的知識活動，也與數學研究方法密切相關。可惜，赫胥黎從未回應西爾維斯特的批評，不過，到了晚年，他倒是修正了有關數學知識本質的偏頗看法。

在第六—九章這四章中，本書所討論之爭議，都離不開康托爾所創立的集合論，因此，讀者在閱讀時，千萬注意此一順序才好。第六章中有關克羅內克與康托爾的爭議，當然也是數學史上極著名的個案，值得我們好好地理解它的前因後果，尤其是它高度相關了後面幾章的論述。事實上，本章爭議起因於意義 (meaning) vs. 邏輯 (logic) 的張力，亦即一個邏輯上可以站得住腳的證明，可能在某特定的數學哲學主張下顯得毫無意義，而這正是康托爾的無窮集合及其超限算術 (transfinite arithmetic) 所面臨的「困境」。克羅內克所以無法接受，正是由於他的哲學立場不容許這種無窮集合的概念，於是，他對於康托爾的集合論當然也就不假顏色了。至於其結果，當然就是學術地位不對等的康托爾付出慘重的代價！不過，有些數學史家倒是注意到：克羅內克和康托爾之間的鬥爭，根本不是傳統與創新的數學形式之間的衝突，而是新典範之間的競爭。其實，這一場爭議顯然是由於數學本體論的分歧所引發。

克羅內克是數學基礎學派中所謂的直覺主義之先驅，他對於數學物件 (mathematical entities) 的存在之主張膾炙人口：「自然數是上帝造的，其他都是人造的。」既然是人造的，當然要求必須建構 (constructive) 得到，因此，也就無法允許表徵「真實無限」(actual infinity) 的集合論之正當性了。

這種涉及哲學立場的數學知識之意義或正當性 (legitimacy)，在第七章波賴爾和策梅洛的論戰中，也再度上演。康托爾在處理他的連續統假設 (continuum hypothesis) 時，必須依賴良序原理 (well ordering principle)。爲了證明後者，策梅洛提出選擇公理 (axiom of choice)。由於這個公理涉及無窮多的選擇，因此，隨即引發爭議的風暴，有贊成也有反對，但反對者居多。「最大的爭議集中在法國的數學家之間，其中，最主要的反對者是埃米爾·波賴爾。」波賴爾反對的理由，可想而知是他「堅決反對缺乏建構性的方法」。不過，正如史家的後見之明所指出：「這整段歷史插曲中最具反諷意味的是：對這個公理最強烈的反對，正

是來自法國分析家小組—貝爾、波賴爾和勒貝格，而他卻在無意中非常頻繁地用到它，他們的工作部份地說明了數學不可缺少它。」

在第八、九章中，作者主要說明數學基礎的三大學派彼此之間的論戰。先是第八章中，龐加萊（又是法國人！）與羅素針對數學的邏輯基礎之爭議，焦點當然是羅素所主張的邏輯主義 (logicism)，企圖將數學化約為邏輯。然後，是第九章的希爾伯特與布勞威爾針對形式主義 (formalism) vs. 直覺主義 (intuitionism) 之爭！

在 1891 年克羅內克去世之後，龐加萊就成為康托爾超限算術的主要反對者，而羅素的邏輯大廈則建立在康托爾集合論的基礎上，因此，龐加萊 vs. 羅素當然一點也不令人意外。最後，邏輯主義功敗垂成，不只存在有一些數學概念無法利用邏輯來定義（因此化約主義 (reductionism) 無法證成），同時，正如龐加萊所指摘：「在邏輯中，我只看到了束縛創造者的鐐銬。它對簡潔沒有幫助—而且差得很遠。如果在說明 1 是一個數時，需要 27 個函數，那麼，要證明一個實數有關的定理，得需要多少個函數呢？」

正如第八章一樣的論戰之起因，有關形式主義與直覺主義的爭議（第九章），也源自數學哲學的基本立場之迥異。根據希爾伯特的比喻，形式主義下的數學知識活動可以類比為西洋棋遊戲，其中各棋子的名字只是提示性的，至於西洋棋的走法，則完全取決於慣例和遊戲規則。因此，形式主義顯然主張數學不過是一種沒有意義的符號遊戲。譬如，1891 年，希爾伯特曾經主張：「在所有的幾何陳述中，用桌子、椅子、啤酒杯這些詞來代替點、線、面應該是可能的。」後來，他在 1899 年發表《幾何學基礎》，當然出自他希望為歐氏幾何學建立一個更加穩固的基礎，同時也消除數學對直覺的依賴。而這顯然是他與布勞威爾的直覺主義衝突的主要導火線。事實上，希爾伯特因為支持康托爾的關係，已經捲入衝突。他還認為克羅內克的執著威脅了數學的進展，因為數學與高度主觀的直覺基礎結合，並通過逐步建構，其前景將大受限制。希爾伯特剛好相反，他只要求邏輯表達與一致性。此外，他強烈主張克羅內克極力反對的無理數，不應該排除在數字的世界之外，因為沒有它們，分析學領域將淪為不毛之地。

由於分析學很多定理除了與無理數有關之外，還必須依賴邏輯學中的排中律，才能加以證明。而與希爾伯特同為《數學年鑑》編輯委員的布勞威爾，基於直覺主義的認識論立場，竟然反對排中律的使用，兩人的嚴重衝突，當然就不可避免了。

面對這場無解的衝突，希爾伯特顯然被迫遊說《數學年鑑》的編輯同仁，將布勞威爾除名，因為他擔心一旦早死，布勞威爾將掌控這個當時全世界最有威望的數學期刊。從此一事件來看，希爾伯特固然自詡為救世主，希望拯救數學基礎的危機於水火之中，然而，布勞威爾其實也不遑多讓，儘管他在拓樸學方面做出了不朽貢獻，根據數學家兼數學史家范德瓦爾登 (van der Waerden) 的採訪，布勞威爾後來「不再確信他在拓樸學中的成果，因為從直覺主義的觀點來說，它們不是正確的。他以前所做的、最偉大的成就和他的錯誤，他都按照他的哲學來判

斷。他是一個很奇怪的人，瘋狂地愛著他的哲學。」

當然，在希爾伯特這一方面，排除布勞威爾也算不上是一種勝利，因為哥德爾在 1930-31 年所發表的不完備定理，就一舉摧毀了形式主義者「終將知道」的一致性與完備性的美夢！

數學的基礎在哪裡？或者它有可能並不存在？所有這些可能永遠沒有答案！不過，數學哲學的立場絕對影響數學教學的策略，因為數學是被發現的或被發明的，顯然都依序連結到絕對主義 / 柏拉圖主義，以及易誤論 / 建構主義。這是本書最後一章的主題，卻也被近幾年來將數學教育改革誇大成爲「數學戰爭」(math war) 的學者所忽略！作者在歷史上的數學恩仇錄之終章安排此一題材，似乎意在指出：實踐是檢驗真理或意識型態的最佳手段！如此看來，前面九個故事，煽情也罷、悲壯也罷、恩怨也罷，在時間的沈澱下，都可以在本書找到最好的依托！

數學爭議可以讀出認知的意義與價值，這是本書閱讀的最佳切入點，也是我推薦本書的主要理由。