

# 波利亞 (George Polya) 的〈教師十誡〉

何耿旭、陳彥宏翻譯

洪誌陽校訂

過去這五個學期以來，我的所有課程都在對中學教師演說，這些教師在歷經幾年教學後，又再回到大學來接受外加的訓練。在了解到他們需要一個對日常教學直接有所助益的課程，我便試著去設計這樣的課程；無可避免地，在課程中我必須重複地表達個人對教師日常工作的看法。在我的論點中試圖先假設有一固定的形式，最後，我將它們歸納濃縮成十條規則，或稱「十誡」。

爲了清楚說明十誡的意義，本應加上例子，但鑒於空間有限，在此便不再贅述。不過，在我的《數學解題》(*How to Solve It?*) 一書中，舉例說明了一些觀點；而在其他著作中，也可以看到關於此一主題的論述。現在，我將『十誡』列舉如下：

1. 對你所教授的科目有興趣。
2. 瞭解你所教授的科目。
3. 試著去“讀”學生的表情、瞭解他們的期許與困難；設身處地為學生著想，將自己當作是學生。
4. 明瞭學習的途徑：學習任何一件事的最佳途徑就是親自獨立地去發現其中的奧秘。
5. 不但要教授學生知識，而且要讓他們知道技巧、訣竅，學習正確的心態及有系統工作的習慣。
6. 讓學生學習去猜測。
7. 讓學生學習證明。
8. 留意現在手邊的問題，從其中找尋一些可能對於以後解題有幫助的特徵—試著去揭露潛藏在目前具體情境中的普遍形式。
9. 不要一次就洩露出所有的祕訣—在你告訴學生之前，讓他們去猜測—讓他們盡可能地自行去發現。
10. 啟發問題；讓學生勇於發表，不要填鴨式地硬塞給學生。

## 說明

最初，我是針對課堂上的參與者—中學數學教師，來說明前述的十誡。儘管如此，這些規則適用於任何的教學環境、任何層級的任何科目；不過，一般來說，數學教師有較多、較好的機會去運用它們。現在，我們開始一個一個來考慮，其中將會特別針對數學教師的教學：

1. 要明確地預測某種教學方法是否奏效幾乎是不可能的；然而有一件事是可以確定的：如果你對自己所教授的科目感到厭煩，那麼你也將會使你的聽眾感到厭煩。

以上應足以說明十誡中的第一誡：對你所教授的科目有興趣。

2. 若教師對所教授的科目沒有興趣的話，他也將無法使學生去接受此一科目，因此，興趣是一個教學不可或缺的必要條件；但光有興趣是不夠的，當你對一個科目不瞭解時，再多的興趣、教學方式也無法讓你清楚地對學生解釋一個論點或看法。

這也應該說明了十誡中的第二誡：瞭解你所教授的科目。

3. 甚至在有了興趣、瞭解所教授的科目之後，你仍然有可能是一位差勁或相當平庸的老師。我承認這種狀況雖不常見但也絕非罕有：大部分的人便曾遇過這樣的老師——他們雖瞭解所教授的科目，但在班上卻無法建立與學生接觸的管道。所謂教學應該是教授的一方可以引起他方的學習，因此，在教師與學生之間必須有某種接觸的管道：教師應當明瞭學生的處境、支持他們的目標、理由。這就是十誡中的第三誡：試著去「讀」學生的表情、瞭解他們的期許與困難；設身處地為學生著想，將自己當作是學生。

4. 前三誡包含了良好教學的要素，它們共同形成了一種充分必要的條件——如果你對你所教授的科目有興趣、瞭解它，並且可以看清學生的問題，你已經或即將成為一位好老師了；你所需要的就只是經驗了。

經驗是必需的，實際的經驗使你明白在教室中教師與學生的「教」與「學」，讓你熟悉獲取知識與技能的過程——包括學習、發現、創造、瞭解等等許多方面。心理學家已經做過很多有關學習過程的實驗並發表了一些有趣的論點。對一位非常善於接納與理解的教師來說，這些實驗與論點具有刺激的作用；但是就我們這裡主要討論的教育方面來說，它們還沒有完善到可以對教師的教學直接有所助益，因此，教師首先必須倚賴個人的經驗與判斷。

根據近半世紀的研究與教學經驗，以及深入內省後，對於課堂教學所需，我在這裡提出一些我認為對課堂教學極為重要的學習歷程的觀點。有一件事是一再地被強調著：主動積極的學習優於被動消極、「僅僅只是接受」的填鴨式學習；愈積極主動便愈好：學習任何一件事的最佳途徑就是親自獨立地去發現其中的奧秘。

事實上，在一個理想的教學計畫中，教師像是一位心靈的「助產士」——給予學生機會自行去發現亟待學習的事物。而往往因為缺乏時間的關係，此一理想實際上很難達成，但卻可以引領我們通往正確的方向——這就好像沒有人能到達北極星，卻能藉由觀望它而找出正確方向一樣。

5. 知識 (Knowledge) 包括了知識性的訊息 (information) 和技巧訣竅 (know-how)。技巧訣竅是一種技能，它是處理知識性的訊息、善用知識性的訊息以達目標的一種能力；可以說是一連串適當的心智活動，最後會讓我們的工作變得有系統。在數學上，技巧訣竅是解決問題、建構證明、批判診斷解答與證明的能力；比起純粹知識性的訊息的獲取，技能重要多了，因此，對數學教師而言，接下來的第五誡是相當重要的：不但要教授學生知識，而且要讓他們知道技巧、訣竅，學習正確的心態及有系統工作的習慣。也正因為在數學教學中技巧訣竅比知識來得重要，「如何教」就比「教什麼」更值得我們去重視了。

6. 「先猜測，再證明」——通常發現的過程也是這樣開始的。從經驗當中，你應該知道這件事，而且你應該知道數學教師擁有絕佳的機會去顯示猜測在發現過程中的地位，也因此讓學生銘記思維活動的重要性。關於後者並不(雖然應該)廣為人知，很遺憾地，鑒於篇幅有限的關係，在此也沒有辦法詳盡地討論。不過，我仍然希望在這一方面你別忽略了你的學生：讓他們學習去猜測。粗心大意的學生很有可能作出毫無根據的猜測。當然，我們所要教授的並非毫無根據地亂猜，而是有憑有據、合理地猜測。合理的猜測是建立在明智地使用歸納與類推結果的基礎之上，根本上包含了在科學中扮演重要角色的合理化推理之所有過程。

7. 「數學是一個學習如何合情推理 (plausible reasoning) 的好學科。」這句話簡述了前述法則蘊涵之意，雖然它聽起來陌生且非常新穎；事實上，筆者是相信它的。「數學亦是學習論證推理 (demonstrative reasoning) 的好學科。」這句

話聽起來則很熟悉—它的某些形式幾乎跟數學本身一樣古老。實際上，更真實的是：數學和論證推理是共存的，論證推理遍及於各個科學學門中，同時將它們的概念提升至充分抽象、明確的數學邏輯層次 (mathematico-logical level)；在這樣的高層次之下，例如，在日常生活當中，已沒有實際論證推理的餘地了(換言之，已不適合實際論證推理)，不過 (並不必要去爭辯這樣一個被廣泛接受的論點)，除了基本的東西之外，數學教師仍必須讓所有的學生知道論證推理：讓學生學習證明。

8. 技巧訣竅是數學知識中較有價值的一部分，比單單只是擁有訊息更有價值。但我們應如何傳授此項技巧訣竅呢？學生可以透過模仿與練習來學得它。當你提出一個問題的解答時，適切地強調其中的教育性的特徵 (instructive features)。如果一個特徵值得仿效，那麼它就是具教育性的，也就是說，它可以用來解答眼前的問題，更可以解決其他的問題 — 愈常用到，便愈具教育性質。但強調教育性特徵的方式，並不只表現於誇讚學生 (因為對某些學生反而會產生反效果)，更應表現在教師的行為中 (如果你有表演天份的話，稍微裝一下效果會更好)。一個適切強調的特徵能將你的解答轉入「範型答案」(model solution)，藉由讓學生模仿可以解決更多問題的答案也能讓它轉變為一個令人印象深刻的形態，因而法則即是：留意現在手邊的問題，從其中找尋一些可能對於以後解題有幫助的特徵 — 試著去揭露潛藏在目前具體情境中的普遍形式。

9. 我希望能夠在這邊指出一些在課堂上容易學到且教師們應該要知道的祕訣。當你開始討論一個問題時，試著讓學生去猜答案。讓那些猜想或甚至敘述臆測的學生陷入進退兩難的情況：他們必須跟隨著求解的過程來看他們的猜測是否正確，且必須要專心一致。這只不過是下列法則(本身是從法則四和法則六的某些部分推敲、拼湊出來的)的一個特殊的情形而已：不要一次就洩露出所有的祕訣 — 在你告訴學生之前，讓他們去猜測 — 讓他們盡可能地自行去發現。

10. 有一個學生一行一行地進行一個冗長的計算，我在最後一行看到了一個錯誤，但我忍住而沒有馬上糾正他。我寧可帶著學生一行一行地檢查：「剛開始蠻不錯的，你的第一行寫對了，下一行也正確了，你做了這個和那個…。這一行真不錯，現在，你覺得這一行如何呢？」錯誤就發生在這一行，如果學生自己發現了，他便有機會學到一些東西。然而，如果我在發現錯誤後立刻就說：「這裡錯了！」學生或許會感到不愉快，而且再也聽不進去之後我所說的話了。如果我太常立刻就說：「你這裡錯了！」的話，學生很可能會恨我，也很可能開始討厭數學，那我在之前對這個學生所花費的苦心就全都白費了。盡量避免去說：「你錯了！」可能的話，改口說：「你是對的，但…」如果你這樣做的話，你非但不是偽善的而且是通人情的，法則十便隱含了你應該這樣做的說法，我們可以讓它更加地清楚：啟發問題；讓學生勇於發表，不要填鴨式地硬塞給學生。

在準老師的課程上，上述的十誡簡單明瞭但卻不容易遵循，且我們也沒能夠讓教師們可以易於遵循，例如，教師們的大學學習鮮少能幫助他們去遵循這些誡條。而且，我們在準中學教師的課程上遭遇到一些棘手的問題。我並沒有足夠的時間、空間和方法 (或者勇氣) 去充分地處理這類問題，然而，有些觀點我卻不得不提出來，這些觀點被在一所北美中學教授代數、幾何、三角學 (及少數更高階的科目) 的老師們所關心。「一般數學」(general mathematics) 或諸如此類多一般性、少數學性的學科並不是我所關切的重點。我不能忍受在我班級的參與者講出這樣的話：「準老師被數學系及教學法的課程惡劣地對待；數學系講的課我們聽來有如一塊嚼不動的牛肉，而教學法的課卻像一碗沒有肉片的淡湯。」我遇

到好幾位教師表達了同樣的意見，但或多或少是覺得害臊的。這些意見的來源到底是什麼呢？每個人都知道一些例子，比如說教授代數或幾何的老師對這門學科的瞭解程度比學生所追問的還要少；如果我們所談論的講師不是教練或家政老師，而是數學教師的話，這種情況就更容易發生了。但不論這類例子是何等異常和普遍的，我可不希望去討論。

有一件事發生地比起如我們所願的還要頻繁：一個能夠勝任和合乎意向的數學教師對中學數學背景瞭解地不夠深，以至於他無法滿足較好的學生的好奇心或知道他們的反應。(有一些觀念應該要，但卻沒有廣泛地被知道：例如無限小數、無理數、可除性、立體幾何的第一個證明等等)。為何會如此？大半的準老師們不瞭解或帶著不穩的中學數學知識便離開了學校，而他們應該在何時何地再來學中學數學呢？數學教師修習一些由數學系所提供的相關進階課程，他將會有很大困難去跟上(或通過)這些課程，因為他的中學數學知識並不充分；他再也沒辦法將這些課程與中學數學相連接。或者他會去修習一些由教育系所提供的有關教學方法的課程，這些課程基本上符合了教育系只教方法而非科目主體的原則。準老師們或許會(幾乎沒有計劃地)接受下面的觀感：教學方法與學科主體的不夠瞭解息息相關。無論如何，他對中學數學的瞭解，仍然是最低限度的。

在這裡我要提出一個我覺得更甚於其他的觀點。老師一直被勸告去做很多「漂亮」的事：他該給他的學生不只是資訊，而且要讓他們「知道如何做」、鼓勵他們的創意和富創意性的工作，同時讓他們熟知發現的喜悅和張力。然而，教師本身呢？他有機會在他的課程中獨立做數學研究工作嗎？或是有機會獲知他打算傳達給學生的技能嗎？答案是否定的！就我所知，並沒有任何一所大學能給予教師一個還算不錯的機會，去發展他在數學方面的技巧訣竅與技能。對於這樣明顯的缺點，我介紹一個補救方法：一個數學教師的「解題討論班」(a seminar in problem-solving)，這個討論班所需的知識，僅僅只要有中學的水平就可以了，所討論的問題的難度，也稍在中學水平之上而已。如果透過適當引導的話，這樣的討論班可能會有很好的效果。首先，參與者將會有很好的機會透徹地獲知中學的數學知識—真正的、隨時可用的知識，不單單只是記憶，而是透過將其應用於有趣的問題之上。然後，參與者可以獲得一些處理中學數學的技巧訣竅、技能及解題要素的洞察力。此外，我也利用討論班，讓參與者練習去解釋問題和引導答案；事實上，我也給予他們練習教學的機會，因為他們在平時課堂裡並沒有這樣足夠的機會。經由下列的方式去實施：在某些練習單元的開始，每個參與者會收到一份不同的問題(每個人一題)，打算讓他在這個單元解決，但他不能和同事們討論，不過，他可以由引導者給予些許幫助。

在此單元與下一單元之間，每個參與者都應完成、回顧、盡可能地簡化解答並留意其他的解題方式等等。他也應該為如何在討論班中演示問題與解答詳加計劃一番。關於以上幾點，他有機會可以向引導者請教，然後，在下一個練習單元中，所有的參與者組成數個討論小組；每一個討論小組盡量由四位意氣相投的成員組成，其中一位扮演老師的角色，另外三位則充當學生，按法則九及其他誠條，老師對學生演示他的問題，且試著引導他們得到解答。當獲得答案後，接著，便會對演示進行一段簡短而友善的評論。然後，換下一個成員擔任老師且演示他的問題；這個過程一直反覆進行到每個人都輪過為止。有一些特別有趣的問題或特別好的演示過程，稍後會再對整個討論班演示一遍並進行討論。

用討論小組的方式來進行解題相當受到歡迎，而且，我覺得整個討論會相當成功。所有的參與者都是有經驗的教師，他們很多人也都感覺他們的參與給他們的班教學，帶來了許多有用的點子。