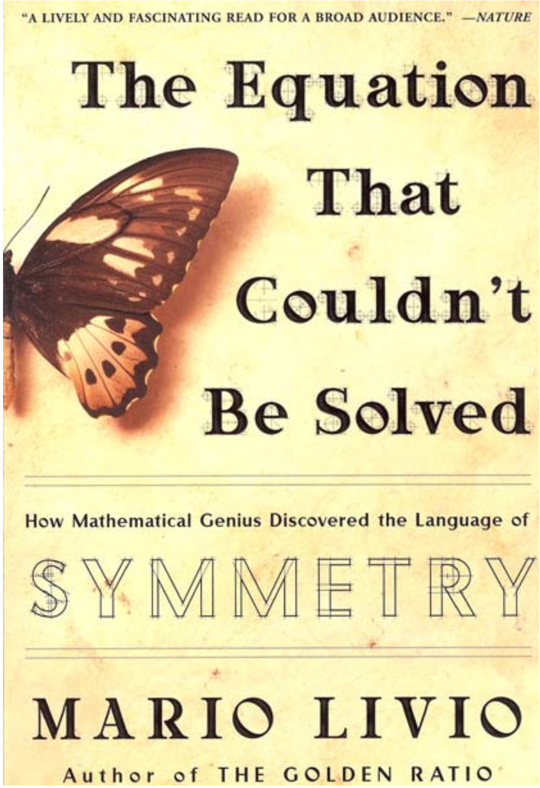
無解的方程式

劉柏宏
國立勤益科技大學通識教育中心

書名：The Equation That Couldn't Be Solved
作者： Mario Livio
出版社：New York: Simon & Schuster.
出版年份：2005
出版資料：平裝本 pp. 353+xii, 定價美金 15 元。
國際書碼：ISBN 978-0-7432-5820-3.



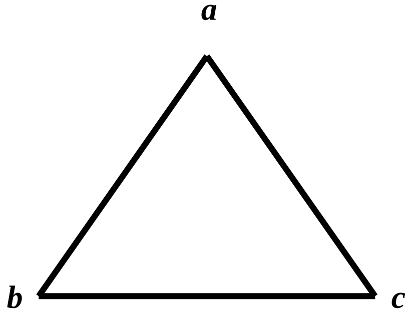
一、前言

本書作者 Mario Livio 之前在《黃金比例》(Golden Ratio)一書當中描寫大自然的數學比例之美。而在本書「無解的方程式」(暫譯)當中則延續相同的信念，介紹數學對稱之美。不過，必須提醒讀者的是，本書標題有兩個可能誤導之處。首先，標題既然爲「無解的方程式」，想當然耳主角是方程式。但是，Mario Livio 在本書著墨最多的，卻是數學與大自然的對稱美，至於解方程的數學過程，只佔據次要角色，九個章節中只有三章直接談到求解方程式的歷史過程，尤其，牽涉

到數學運算的部份更是被移到〈附錄〉當中。作者想吸引一般廣大讀者的用心相當明顯。所以，若有讀者想要從本書當中，了解求解方程式的數學過程，可能會大失所望。再者，本書的主角「五次方程式」並非「無解的方程式」，(例如 $x^5 - 1 = 0$ 很明顯有解) 而是無法找出一般通解 (根式解) 的方程式。所謂一般根式通解最簡單的例子，就是大家在國中時期所學過的一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的公式解 $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$ 。這種通解的特點，是方程式的解可以用方程式中的係數來表示。十五、十六世紀文藝復興時期，義大利的數學家解決了三次與四次方程的通解問題。但之後兩百多年的數學家卻一直無法求出五次方程式的一般根式解。所以，正確地說，本書標題應該取爲「沒有通解的方程式」(The equation that couldn’t be generally solved)。但太過清楚的標題，讀起來就顯得累贅，而且作者取這樣的標題似乎有其隱喻的目的，這點留待最後再談。

二、內容簡介

從本書一開始的內容，就可以看出作者擁有寫作數學或科學普及書籍所需具備「談天說地」和「東拉西扯」的深厚功力。在前兩章中，作者針對「對稱」這個概念從至大無外的天文學，談到至小無內的量子力學，就是一直避談數學。這樣的安排，除了爲後面內容做鋪陳之外，恐怕主要是讓畏懼數學的讀者卸下心防。一般人對於對稱一詞的直覺概念，大都是一種靜態的均衡圖像。如圖一中之正三角形，大多數人應該都認爲是個對稱圖形。但若深究下去會發現這正三角形對於水平軸線並不對稱，我們之所以直覺上認爲它是個對稱圖形，是來自於我們視覺上習於辨識左右之對稱性 (reflection symmetry)，而對於其他方位的對稱性質則容易忽略。英文的對稱 “*symmetry*” 一詞，源自古希臘文的 “*συμμετρία*” 和拉丁文的 “*symmetria*”，意即「相同的測度」(*sym metria*; *same measure*)。以此看來，古代關於對稱的概念，是較爲廣義的。比方說，圖一中之正三角形對應於 30 度角和 120 度角斜線的兩邊具有相同測度，因此，對稱於這兩條斜線；假使將這正三角形沿順時針或逆時針方向做 60 度的旋轉，雖各點位置改變，但整個圖形仍保持不變，所以，正三角形對稱於 60 度的旋轉 (rotation symmetry)。至於這些和「無解的方程式」有什麼關係呢？作者一直賣關子，書中前兩章始終圍繞在「對稱」這個概念上面打轉。



圖一

為了加深讀者對於對稱的印象，作者除討論繪畫、建築、音樂、的對稱性外，也談及英文字句的對稱之美。例如 “Girl, bathing on bikini, eyeing boy, finds boy eyeing bikini on bathing girl.” 這句子不管由前唸到後，或者由後往前唸都是同樣一句話。另外，也利用英文字母的對稱性，造出左右對稱的句子。事實上，中文的所謂回文句和鏡像詩，也有相同的對稱美，且其意境更是英文所遠不能及的。例如「戶滿春風春滿戶，門盈喜氣喜盈門」這副回文對聯，就蘊藏著蓬勃喜氣與生機。宋朝蘇東坡更是箇中高手，例如：

春晚落花餘碧草，夜涼低月半梧桐。

人隨雁遠邊城暮，雨映疏簾繡閣空。

空閣繡簾疏映雨，暮城邊遠雁隨人。

梧桐半月低涼夜，草碧餘花落晚春。

這首詩無論順唸倒唸都是同一首，蘇東坡的文學功力令人讚嘆再三。而下列這幅鏡像回文對句也相當精采 (參見 ttp://www.honglinbbs.com/read.php?tid=120893)：

青　赤
山　日
暮　中
雨　天
暮　中
山　日
青　赤

這副對聯不僅上下左右都對稱，且詩中景緻也互為對映。作者 Mario Livio 若知道中文具有如此的對稱之美和意境，想必定也將此納入書中才是。

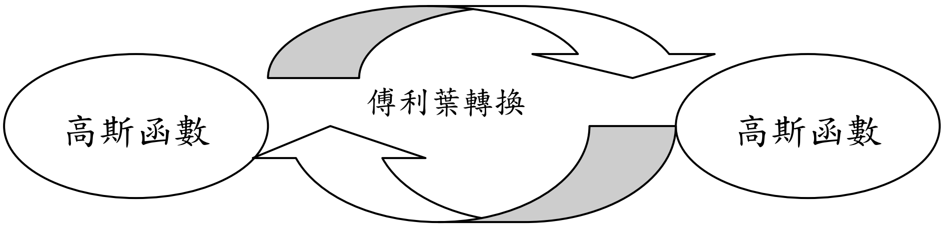
讀完前兩章優美的對稱性質之後，讀者即將面對的內容，將是一連串冷酷、失望、與悲慘的故事。本書從第三章到第五章敘述的，是數學家求解方程式的歷史過程。作者從古代東西方的方程式發展，談到文藝復興時期關於「三次方程式解法先後之爭」的數學懸案。其中塔達里亞 (N. Fontana Tartaglia) 對於卡丹諾 (Girolamo Cardano) 的抄襲之指控與挑戰，雖比不似牛頓與萊布尼茲有關微積分優先權的世紀之鬥般轟轟烈烈，卻也顯示出十六世紀學術圈階級意識的無奈。當時，數學不僅是一種技藝，也是可以做為晉身仕紳的一種工具。(其中所代表的社會意義，有興趣的讀者可進一步參閱登載於《科學月刊》第二十四卷第七期，由蘇意雯老師所寫的〈塔達里亞 vs. 卡丹諾〉一文)。而從這時候開始，求解方程式的目的，漸漸脫離其原本的應用價值，而成為一種數學心智的修鍊，也開始

吸引後續諸多數學家的投入，例如歐拉與高斯。不過，歐拉與高斯兩人對於五次方程是否存在根式解的看法截然不同。歐拉認為透過適當的降階過程，求得五次方程的根式解應指日可待。但高斯眼見不少數學家一次次的挫敗後，開始反向思考，他說：「以嚴密的方式證明五次方程根式解的不可能性，或許不是那麼困難。」以歷史的後見之明來看，高斯的方向是正確的，但不知為何他從此之後未曾對這問題發表過意見，也忽略其他後起之秀在這方面的工作，而這也間接導致一位數學天才的悲劇故事。

雖然第四和第五章所佔篇幅不多，但可以說是整本書最令人動容的篇章。雖然筆者早已略知兩位數學天才致力攻克數學頂峰、卻懷才不遇的落寞，以及他們英年早逝的不幸結局，但作者情感豐富的文字和有如偵探小說般安排的劇情，仍讓人讀起來不勝唏噓與鼻酸。有別於文藝復興時期必須靠挑戰權威，以取得學術或社會地位，在十九世紀歐洲的學術圈當中，若年輕人想要出頭，他的作品必須獲得權威人士關愛的眼神。挪威數學家阿貝爾 (Abel) 和法國數學家迦羅瓦 (Galois) 所辛苦尋覓的，就是當代數學大師的肯定與推薦。阿貝爾一生窮困但並不潦倒，他一直浸淫於數學的研究當中。一開始，他認同歐拉的想法，認為可以找出五次方程式的根式解。但在一連串的失敗後，他轉而思考高斯的論點，並終於以雙重歸謬證法，證明五次或五次以上方程式根式解的不存在性。為了希望別人能重視他的研究成果，已經阮囊羞澀的阿貝爾，仍自費請出版商將他的證明印成 6 頁的小冊，寄給高斯希望獲得他的青睞。只是始終未曾收到高斯的回函。據說後人在高斯死後，發現阿貝爾的信竟仍原封不動地夾雜在高斯的諸多信件當中！其實，忽略阿貝爾成就的不僅高斯一人。阿貝爾曾進一步將他的研究成果編輯成冊，投遞到法國科學院，而負責審閱阿貝爾的著作的，是當時鼎鼎大名的柯西 (Cauchy)。只是，沒想到阿貝爾的心血著作竟，也被柯西收藏到不知流落何方！

至於另一主角加羅瓦生長在當時數學研究重鎮之一的巴黎，應該比阿貝爾有更好出頭的機會。只是，相同的厄運也面臨到加羅瓦身上。事先，加羅瓦並不知道阿貝爾在五次方程上的發現。1829 年，當時未滿十八歲的他，利用前所未見的手法，證明了五次方程根式解的不存在性，並在五、六月間，將結果遞交給法國科學院，而負責審閱的偏偏又是柯西。而就在此時法國科學院宣布設立一項數學論文大獎，投稿截止日期是 1830 年 3 月 1 日，加羅瓦當然是躍躍欲試，而且在等待期間，又得知阿貝爾已發現類似結果，心中當然有些著急，但卻又必須靜待柯西的審查結果。原本柯西要在 1830 年 1 月 18 日向科學院報告加羅瓦論文的審查結果，以及他自己的一些研究成果，但在當天，他向科學院稱病請假而延到 2 月 25 日。此時的迦羅瓦可能已耐不住性子，因此，將原先的結果補強修改之後趕在截止日前，遞交給論文大獎的評審委員會。加羅瓦雙管齊下的策略原本應該萬無一失，只是沒想到柯西在 2 月 25 日當天的報告中，竟然對於加羅瓦的結果隻字未提，至於角逐論文獎的稿件不知為何被科學院的秘書傅利葉 (Fourier) 帶回家，而他竟不幸於 5 月 16 日去世，而從此加羅瓦的稿件也不知去向。

真是造化弄人，兩位數學天才的命運竟不幸地如此「對稱」，不僅都被柯西不知是有意或無意地忽略，而遞交給另一人的論文 (分別是高斯和傅利葉) 也都因爲當事人的離世而不見天日。作者在做劇情的描述時想必也對此巧合有所感觸才是。不過，作者似乎沒發現故事的配角高斯和傅利葉也有某種對稱的巧合。高斯和傅利葉兩人年代相仿，專長領域雖無太多交集，但他們兩人所發展出來數學工具，在現代通訊理論當中卻發揮極大作用。例如，在工程數學中一個高斯函數 $f(x) = ae^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}}$ $(a > 0, c > 0)$ 在經過傅利葉轉換之後，仍是一個高斯函數 (圖二)。這不也是一種對稱！？



圖二

作者給加羅瓦一個浪漫數學家 (romantic mathematician) 的封號，主要在於他眾所周知爲愛情決鬥而不幸身亡的動人故事。但作者對此故事的內情存疑，因此，他發揮歷史學家和私家偵探的精神，親至法國查訪相關內容，將所有人事物逐一清查比對，並做出幾種不同的假設和驗證。雖然一些瑣事交代得稍嫌繁雜，對推理小說有興趣的讀者不妨仔細斟酌，抽絲剝繭，或許能將加羅瓦真正死因弄個水落石出。

到了六、七、八三章，作者再度展現數普作家的功力，將各不同領域的內容整合在對稱的概念底下，而且和第一、二章做個對照。第六章主要談到加羅瓦爲證明五次方程根式解的不存在性，而發展出現在所謂的群論及其對稱性。本書將群論的發展歸功於加羅瓦令人讚嘆的解題進路。要如何證明五次方程根式解的不存在性呢？在諸多前輩對這問題採取正面攻擊、卻都鎩羽而歸的情形下，迂迴與間接的方式，似乎是無可迴避的選擇。阿貝爾所選擇矛盾證法，是一種逆向思考，而加羅瓦則採取迂迴轉進的方式。回到前面所曾提到的圖一的對稱關係，正三角形在經過旋轉和鏡射後圖形雖仍對稱，但頂點位置已改變。例如三個頂點 a, b, c 經過 60 度、120 度、180 度旋轉和分別固定三頂點做鏡射轉換後，所形成的六種置換對應分別爲：

$$\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ b\,c\,a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ c\,a\,b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ a\,b\,c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ a\,c\,b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ c\,b\,a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ b\,a\,c \end{pmatrix}$$

這六種置換關係符合抽象代數中所謂的群之條件，故稱置換群 (permutation group)。加羅瓦就是把求解方程式的問題轉化成置換群的問題，作者也就是藉此把對稱視爲求證五次方程式無根式解的終極密碼。群論是一個相當抽象的概念，James Newman 稱它爲「數學抽象化的頂級藝術」(the supreme art of mathematical abstraction)。如何化抽象概念爲具體物件，以便讓普羅大眾能領略其內涵，具有高度的挑戰性。不過，作者在這方面花了不少心思，透過大量生活實例，企圖讓讀者了解群論的性質。例如穿牛仔褲的方式、幾何坐標、澳洲某一原住民部落的婚配習俗、還有語言學等等。

作者在第六章雖然花不少篇幅描述加羅瓦證明五次方程無根式解，可是，他始終迴避數學過程與運算，以至於讓讀者對於方程式和置換群的關係，只能停留在字面上的理解，無法有數學上的領會。所以，讀者如果想要更加瞭解其中的數學過程，必須藉助其它參考資料。筆者相信以作者蒐羅實例解釋群論概念所做的功夫，應該也能夠透過數學實例以深入淺出的方式 (例如以二次方程式爲例)，讓讀者瞭解加羅瓦理論的精髓。很可惜，他並沒這麼做。此外，加羅瓦這種「借刀殺人」的解題模式，在現今抽象數學中雖屢見不鮮，但在當時是一種革命性的手法，而更重要的，是被加羅瓦當作工具的群論，如今已變成一個獨立的數學領域，且在其他領域也有廣泛的應用。雖然阿貝爾和加羅瓦同樣解決這個問題，但由於加羅瓦的方法所產生的後續邊際效益較大，作者似乎較爲推崇加羅瓦所做的貢獻。而這也是一些數學史家在評斷比較數學家的歷史地位時，所經常使用的一種判準。只是這種判準的使用若過於輕率，很可能被批爲「輝格式史觀」(Whiggish history)。當然，本書並不是打著數學史專業書籍的旗幟，自然不必承擔這種包袱。

緊接著，作者又從群論的例子連結到德國數學家克萊因 (Felix Klein) 結合代數與多面體幾何，以說明爲何橢圓函數可以解決五次方程式的原因。然後，作者就拋開方程式與群論的主題，從歐氏幾何談到非歐幾何，再延伸至相對論，直到引入量子力學和弦論爲止，整本書的視野變得開闊許多，也讓讀者了解數學與科學之間的關係。只是，後面所延伸的主題已常見於其他科普書籍，過長的篇幅反而顯得過於流俗。事實上，本書前半段的內容在目前所出版的數普書籍之中，算是獨樹一格的，作者應該可以不必湊這個熱鬧。不過，數學科普書籍的內容如何做到通俗而不流俗，甚至不媚俗的境界，對所有作者而言，都不是一件容易達到的要求。再者，必須提醒讀者一點，本書是在對稱這個信念下所完成，作者免不了有些偏見，把一些不符合對稱信念的例子有意或無意地忽略。書中提到楊振寧和 Robert Mill 以數學方程式描述物理世界的對稱性，卻對楊振寧和李政道所發現的宇稱不守恒現象模糊帶過，就顯得過於迴避。

在最後兩章中，作者將焦點轉移到認知心理學的領域，第八章談對稱之美的心理作用，第九章則探究天才的大腦中是否存在某些特殊配方。透過與其他領域的比較，作者試圖瞭解數學天才的心理素質究竟有何特別之處又是如何運作。有幾個有趣的研究結果值得有志於數學的「少年仔」參考。首先值得一提的，是

數學家通常比其他領域的專家較早成名。根據數學家 Michael Atiyah (1966 年費爾茲獎和 2004 年阿貝爾獎的得主) 的說法，這是由於數學講究原創性，不似其他領域在作出重大貢獻之前，必須閱讀大量文獻。只要夠創新，不必被別人的想法所牽絆。另外，心理學家 Howard Gardner 在研究過許多領域的大師之後，提出一個「十年法則」，也就是，他們大多是專注於研究某個特定主題十年左右，才能做出突破性的貢獻，但這十年法則卻不適用於數學與科學領域。例如，阿貝爾和加羅瓦對於五次方程根式解的研究興趣源起於高中時代，但都在弱冠之年左右就取得重大進展。另一個心理學家 Arnold Ludwig 針對一千多位各領域的頂尖人士做追蹤調查之後，發現只有百分之二十八的科學家有精神異常的毛病，相對的，卻有高達百分之八十七的詩人經常受精神疾病的折磨。上述結論可以告訴我們，研究數學比較容易少年得志和享受精神上的健康。但筆者認爲想要理解數學天才的創意心靈究竟如何運作畢竟是困難的。愛因斯坦曾說，「宇宙之間最不能理解之事，就是宇宙竟然可以被理解！」既然遙遠縹緲的無限宇宙都可理解，那分析拳頭大小般的大腦豈不更輕而易舉，因此，可能是這句話引起科學家們的興趣而競相理解他的大腦。如果愛因斯坦知道他賴以理解宇宙奧祕的大腦，最後竟變成科學家們研究的對象，可能也要跳出棺材教訓這些科學家：「天才之間最能理解之事就是天才永遠不能被理解！」所以，想要釐清天才組合配方的努力，也將註定是一道「無解的方程式」，這可能也是作者選擇本書標題時，所故意安排的一種隱喻。

三、評論

綜觀全書，作者以對稱概念爲主，數學歷史發展的故事性和其科學應用的延展性爲輔，大大提高了本書的可讀性。與其他數科普書籍相較，作者編排的手法雖無太大的創新，但是，作者利用具體案例解釋數學抽象概念所下的工夫，確實值得讚佩，也值得讀者細細品味。只是，過於單薄的數學過程的推演是其美中不足之處。數學普及書籍不能只爲了吸引畏懼數學的讀者，而老在概念的外圍打轉。有時候，欣賞數學之美的最佳管道，就是透過數學本身，而不能全部訴諸於舉例和隱喻。

參考文獻

蘇意雯 (1996).〈塔達里亞 vs. 卡丹諾〉,《科學月刊》24(7)。
http://www.honglinbbs.com/read.php?tid=120893

優秀數學科普作品的指標

評價方式：指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

1 知識的實質內容

・認識論面向：☆☆

• 歷史或演化面向：☆☆☆☆
• 哲學面向：不適用
• 教育改革面向：不適用
2 形式或表達
• 創新手法：☆☆☆
• 數學知識的洞察力：☆☆☆☆
• 忠實可靠的參考文獻：☆☆☆☆
• 敘事的趣味性、可及性與一貫性：☆☆☆☆☆
• 中譯本的品質：不適用
3 內容與形式如何平衡
• 青少年層次：☆☆☆☆☆
• 一般社會大眾：☆☆☆☆☆

摘錄本書最精彩片段

特別的是，在無解方程式的英雄事蹟中的兩位主角—阿貝爾和加羅瓦，他們的生命竟是如此驚人地相似。他們倆人最初都是在家中接受教育，後來皆受到良師的啓發。倆人都在幼年失祜，也都企圖解決同一個惡名昭彰的難題。還不僅如此，倆人都是保守數學權威體制 (特別是柯西) 的受害者，也都承受著悽苦的愛情生活 (爲了不同的理由)，最後，倆人都在燦爛的青年時期悲劇地離世。

In particular, there are striking similarities between the lives of the two main characters in the saga of the equation that couldn't be solved—Abel and Galois. They were both initially educated by a parent and inspired by a talented teacher. Both lost their father at a young age and had attempted to solve the same notoriously difficult problems. But this is not all. They were both victims of the same conservative mathematical establishment (Cauchy in particular), miserable (for different reasons) in their love lives, and both died tragically in the flower of their youth. (p. 142)

正如加羅瓦的群論已經成爲對稱的語言，非歐幾何學是宇宙學家的語言。像這種數學家爲後世物理學家開路的典型，在整個科學史的歷程中屢見不鮮。

Just as Galois's theory of groups has become the language of symmetries and non-Euclidean geometry the language of cosmologists, this type of "anticipation" by mathematicians of the needs of physicists of later generations has repeated itself many times throughout the history of science. (p. 192)

音樂評論家兼小說家 Marcia Davenport (1903-96) 將這種真實現象形容地相當貼切：「所有偉大的詩人都英年早逝，而寫小說是屬於中年人的藝術，寫論文則是屬於老年人的藝術。」

Music critic and novelist Marcia Davenport (1903-96) expressed this reality beautifully: "All the great poets died young. Fiction is the art of middle age. And essays are the art of old age." (p. 269)