掌握數學概念：評論《用看的學數學》

洪萬生
台灣師範大學數學系

書名：用看的學數學
作者：小林吹代
譯者：陳昭蓉
出版社：世貿出版社，台北。
出版年份：2008
出版資料：平裝本 共 214 頁，定價新台幣 260 元。
國際書碼：ISBN 978-957-776-961-9

一、前言

本書作者小林吹代是一位受過紮實的高等數學訓練（名古屋大學數學系博士課程結業）、任教高中長達 30 年的中學教師，因此，他在「前言」中坦陳數學真難，就顯得十分珍貴：

> 數學本來就很難。教科書把人類自古以來累積的智慧結晶壓縮得令人咋舌。為了便於應用，還盡量把內容抽象化。說數學不難才真是不可思議。不把壓縮過的東西解凍，便無法讀取內容。不把抽象化的內容具體化，根本無法瞭解數學是怎麼一回事兒。
>
> 大家不要被這種說法矇騙，更不要因此垂頭喪氣，覺得別人都說數學簡單，怎麼只有我覺得數學很難。有很多人只是裝懂。說什麼靈光乍現、突然

想到答案，其實它們只不過是裝模作樣。

至於不懂數學的原因何在呢？仿照《小王子》中的一句話：「重要的東西是眼睛看不見的」，小林吹代指出：「數學中重要的是眼睛看不見的概念，也就是算式和記號背後的數學概念。無法想像這種概念，就無法理解數學。」因此，本書以掌握數學概念爲主，「以有形的圖引導大家想像眼睛看不見的概念」，而這，也被作者推崇爲正確的數學學習之道！

二、內容簡介

本書共有 22 章，其目次依序如下：

22. 統計：標準分數不是考試用語

可見，本書內容以代數（含解方程、複數）、三角、函數、指數、對數、無限（窮）級數、排列、機率和統計。不過，其內容一概不離中學（含國、高中）數學範圍。至於本書所穿插的八個專欄，則提供一些諸如記住圓周率小撇步，或數學史上有趣的遺文軼事，乃至一些補充說明等等，相信都可讓讀者適時地調適一下心情。

不過，這並不表示本書內容枯燥乏味。相反地，作者的講述極爲生動，比喻也恰到好處，讓我們充分體會到他對於教學的付出與熱情。

本書一開始，作者就以負數及其惱人的運算爲主題，說明「出現負數之後，數的世界會改變！看數字的方法也會跟著改變。」至於針對 2－3 的運算，他就比喻成爲正的糖葫蘆和負的糖葫蘆連在一起，如此則有助於我們將 2＋(-3)調換成(-3)＋2。因此，他建議讀者將「負數想像為看不見竹籤的糖葫蘆」。

有關文字式，作者的比喻是「可以放數字的盒子」。因此，文字式的加法，就好比我們在整理同一類的盒子（或箱子）。當然，「文字式也可以當成糖葫蘆。重要的是糖葫蘆上的水果和水果連在一起，看不見竹籤。」

本書第 7 章函數所佔篇幅相當多，其中作者除了強調函數概念的高度抽象性之外，也不厭其煩地說明一、二次函數的表徵意義。再者，由於這與二次方程及其求解息息相關，因此，作者在第 11、12 章中，連結了二次函數與二次方程之求解。另一方面，大概有鑒於函數總是中學生的學習夢魘，所以，他在第 7 章結束時特別安排專欄　，指出即使是法國偉大數學家如伽羅瓦和龐加萊，也有考試不及格的時候：

> 天才數學家伽羅瓦 (Evariste Galois, 1811-1832) 曾經在入學考兩次不及格。後來他發明「伽羅瓦理論」，留下了傳世的論文之後，於決鬥中喪生，在二十歲時就英年早逝。
>
> 數學家龐加萊 (Henri Poincare) 的智力測驗結果慘不忍睹。入學考本來也不及格，因為大家公認他在數學上表現優異，所以破例讓他及格。他後來成為數學家之後，出於好奇心接受智力測驗，可惜測驗結果令人大失所望。

有關第 9 章平方根，作者針對平方根如$\sqrt{2}$的意義，揉合畢氏學派「萬物皆數」與數系擴張的理論，提供了一個簡要的說明，對於中學生而言相當容易理解。同時，也多少可以體會此一平方根概念之深刻。

有關複數之介紹，本書共分兩章，依序是第 10、18 章。在第 10 章複數(1)中，作者先是說明$i=\sqrt{-1}$是一個虛假的數（日文稱爲「虛言」），至於它的棲身之所，則是在複數平面（或高斯平面）上。接著，再說明在此一平面上的四則運算及其幾何意義。最後，回過頭來「相容地」呼應負數運算中的$(-1)\times(-1)=1$之幾何意義：「$(-1)\times(-1)=1$意思是重複繞半圈兩次相當於轉一圈」。至於有關第 18 章複數(2)，則是利用複數的極式以及棣美弗定理，來簡化複數的運算。

不過，由於這涉及了三角函數，因此，在第 16、17 章作者依序引進三角比與弧度法，其中清楚說明了正餘弦定義，以及連結三角函數 / 圓（函數）與週期函數的說法，都極有洞見，因爲後者引導了法國偉大數學家傅利葉 (Fourier) 的相關研究：「三角函數是圓，不，應該說是圓的影子。可以利用三角函數表示的週期函數背後有圓。其實只要週期函數滿足一定的條件，就代表函數背後有

圓。」

三角函數之外，在中學數學課程單元中，指數和對數函數也很重要，在第14章中，作者運用如下問題：爲什麼0次方不等於0？來引入本章有關指數之定義，接著再設法定義實數$3^{\sqrt{2}}$，從而指數函數$y=3^x$。有關對數（第15章）之討論，作者在介紹了對數的運算與性質之後，隨即說明「利用底數為10的對數可以估計一個數大致是幾位數。」

本書最後四章（第19-22章），也著重在澄清相關的數學基本概念，如第19章中的0.99999………是否等於1？又如第20章的排列（與組合）、第21章的機率、第22章的統計，都是針對中學生無法輕易掌握的概念，特別進行的簡要說明。

最後，我們必須特別提及第13章「證明」，這是相當別出心裁的一章！作者利用虛數$i=\sqrt{-1}$的引進，證明了$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$，於是「從畢氏數 (3, 4, 5) 和 (5, 12, 13) 可以找到新的畢氏數 (33, 56, 65) 和 (63, 16, 65)，找到兩個斜邊為5×13＝65的畢氏三角形。」不過，本章一開始的問題卻是證明如下等式：$(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(ac-bd)^2-(ad-bc)^2$。作者針對證明的智識需求 (intellectual need)，提出了一些極爲有趣且深刻的教學反思：

> 〔兩邊各自〕展開之後左右的確相等，證明等式正確，應該沒有人會懷疑了吧。經過證明，疑惑應該已經煙消雲散。
>
> 可是出題者看到這種證明，心裡一定不好過。因為光看證明內容，也看不出出題者如何發現這到等式。
>
> 所以學生被迫練習這種證明題，總會一肚子火。
>
> 練習這種證明有什麼用！如果不自己發現這道等式，光是展開證明也沒用。重點在於當初怎麼發現這道等式。

如果教師能夠注意到證明的價值與意義時，我想上述所評論的教學現象，多少或可避免才是。

三、評論

誠如本書（中譯版）封面上的廣告詞：學習數學最重要的是抽象的概念，只要了解概念就能掌握數學全貌，本書的確強調「用看的」來學數學。正因爲如此，本書單元順序當然非常重要，不能任意變動。不過，本書畢竟不是教科書或參考書，因此，作者納入一些與中學生學習數學時相關的有趣材料，當然呼應了數學普及書寫的一貫要求。

本書與抽象概念學習十足相關的主張，無疑是作者如何用心提醒學習者：「數學中重要的是眼睛看不到的概念，也就是在算式和記號背後的數學概念。無法想像這種概念，就無法理解數學。」因此，在本書中，作者不斷地帶領讀者去發現尋常眼睛看不到的概念，這種充滿了洞識的「帶領」在同類的科普書籍中並不多見，值得我們注意與推薦。事實上，如果中學生願意將本書當成參考書來K，我想他們的學習層次當可大大提升。

還有，由於本書首重抽象數學概念，因此，作者苦口婆心地說明「定義」的必要與價值。這在一般科普書籍中也相當少見，值得讀者好好地咀嚼與體會。

本書有兩處中譯值得商榷，例如頁31的「連立方程式」一般慣譯爲「聯立

方程式」，還有頁58的龐加萊之法文名字應為Henri Poincare，至於所附之Poincare Conjecture，應指「龐加萊猜測」才是。

優秀數學科普作品的指標 （暫訂）
Indicators for good popular mathematics books (tentative)

評價方式：指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

1. 知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)

(1) 認識論面向 (Epistemological aspect)：☆☆☆

(2) 歷史或演化面向 (Historical or evolutionary aspect)：☆

(3) 哲學面向 (Philosophical aspect)：不適用

(4) 教育改革面向 (Education reform aspect)：☆

2. 形式或表達 (Form or representation)

(1) 創新手法 (Innovative approach: new story on old stuffs)：☆☆☆

(2) 數學知識的洞察力 (Insight into mathematical knowledge: inspiring and revealing)：☆☆☆

(3) 忠實可靠的參考文獻 (Integrity with references)：☆☆

(4) 敘事的趣味性、可及性與一貫性 (Narrative in an interesting, accessible and coherent way)：☆☆☆

3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form)：針對下列三個年齡層閱聽大眾，考量（知識活動）內容與形式（包裝）的不同平衡點。

(1) 兒童層次 (for kids)：☆

(2) 青少年層次 (for adolescence)：☆☆☆☆☆

(3) 一般社會大眾 (for general public)：☆☆☆☆☆

4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage)：

我在「前言」說過，很多人常說有不懂的地方請儘管發問。

這是哄騙人的說法。會說這句話的人，一定不曾體會過不懂的感覺。

不懂，可不是這麼簡單的事。如果問一問就能懂，代表本來幾乎都懂。

真的不懂的時候，連自己不懂的地方都弄不清楚，不懂數學到底在做什麼。即使講解者的聲音會從耳朵流入，也無法進入大腦。就像完全聽不懂的外文一樣，不僅無法想像，聽起來反而像噪音。（頁 15）

大家都無法接受以下這道等式：

0.99999.........=1

到底是怎麼想的怎麼會說 0.99999………等於 1 呢？

0.9 比 1 小

0.99 比 1 小

0.999 比 1 小

0.9999 比 1 小

0.99999 比 1 小

不管類推到什麼時候，永遠都比 1 小，所以 0.99999………應該會比 1 小。

有人可能會如此反駁。

假如 0.99999………比 1 小，那將會出現矛盾。如果 0.99999………比 1 小，就會有更大的數 0.99999………9。

所以我們只好心不甘情不願的承認 0.99999………等於 1。可是，心裡總覺得自己被「假如………」的辯論方式給騙了……。

其實這種理論有重大的陷阱。

在開始討論之前，我們必須先確認有格重要的約定。如同運動比賽前，一定會有大家同意的規則，我們在討論之前同樣得確定大家對問題本身有共通的理解。

因此，在這次的例子中，什麼才是共通的理解？應該不是「1」，也不是「＝」，而是「0.99999………」，不是 0.9，也不是 0.99，也不是 0.999 而是「0.99999………」。

大家對於「0.99999………」有共通的理解嗎？

一定有人心想，怎麼現在才突然說這種話，這不就是 9 不斷出現的數嗎？所以他們相信大家當然對問題有同樣的了解。

「0.99999………」本來是數。

不，應該說我們決定一項規則，定義「0.99999………」是數，應該沒有人會反對這條規則。

接下來必須決定這個數在哪兒。就算突出直線，只要把範圍擴大到平面即可。

不，我們不打算如此。0.9、0.09、0.009 都是數線上的數，所以最好只要在數線上解決問題。

最後，該如何決定「0.99999………」要在數線上哪個位置？

在數學上稱之爲「定義」。所謂定義，類似運動比賽和電動遊樂器的規則。要不要參加比賽是個人的自由，可是一旦決定參加比賽，就得先瞭解規則，不能在參賽之後才突然說自己不懂比賽規則。

無限級數的定義

……。（頁 169-170）