月曆與數學有什麼關係呢？

林芳羽
台灣師範大學數學系 98 級畢業生

書名：從月曆學數學~原書名：阿草的歷史故事
作者：曹亮吉 (阿草)
出版社：天下文化
出版年：2002
出版資料：平裝本，共 203 頁
國際書碼(ISBN)：978-986-216-288-0

一、前言

《從月曆學數學》一書原名為《阿草的歷史故事》，由輕鬆的對話方式呈現出數學與月曆的關係。數學這門學科在台灣的教育過程往往被寄于厚愛，學生無不焚膏繼晷探討數學精妙之處。《從月曆學數學》循序漸進、通識有趣的內容，不但將數學融入生活，也將數學與歷史結合。

本書主要設定的讀者對象為一般大眾，因此，提到的數學公式並不艱深，加上作者是由曆法的觀點切入，所以，導出數學公式的過程更是淺顯易懂，是一本值得推薦的好書。

二、內容簡介

由利瑪竇與徐光啓的十六世紀末會面開始，簡單介紹中西曆的對照，引起讀者的興趣，接著，再將場景拉到西元 2000 年新舊世紀交替之際，以數學家與留學生的對話廣泛探討曆法的各種層面。

層面一：各曆的發展

作者以徐光啓的改曆引入，介紹明朝的《大統曆》與清朝的《時憲曆》與 24 中節氣，接著，介紹一些地區的星期、星球、方位及動物的對照。不同地區、不同宗教使用的曆法各有特色，但是，曆大約可分爲三大類：純陽曆、純陰曆、陰陽合曆，藉由這三大曆介紹歲實與盈虧以及閏月與閏年的問題。

層面二：眾曆的共通

一個共同生活的團體除了要有共同的行事曆外，還需要有共同的紀年法，但是，各地的紀年法皆不同，常見的有耶穌紀年 (西元)、干支紀年、地質年代紀年。作者由《魯賓遜漂流記》的主角魯賓遜在荒島上記日子，及《環遊世界 80 天》兩本書引入，說明了各地在時間上如何異中求同：與生活最貼近的，莫過於交通－火車時刻使英國在時間上一律依照格林威治天文臺的時間，加上本初子午線正好通過格林威治，因此，世界以格林威治爲主的時區制就此定案，各地的時差也因此確立。

作者接著由古代的觀點引入，最初的記日方式是以大腿骨影子爲依據，由影子的長短決定時間以及發現季節的變化，並觀察到從一個冬至到下一冬至，所需要的時間就是一年的長度。天文官使用長竿代替大腿骨，藉由長竿影子的長短，做更精確的觀察與紀錄，並著有中國古代的第一本天文數學書《周髀算經》。

這部份作者也將西元紀年與干支紀年做結合：先說明天干有 10 個，地支有 12 個，因爲 10 與 12 的最小公倍數爲 60，因此，一輪恰巧爲 60 年，作者在此提了一個問題：若已知西元 4 年爲甲子年，那麼，西元 1911 如何用天干地支表示？

Method 1：1911 除以 10 餘 1、1911 除以 12 餘 3，因爲西元 1 年並非甲子年，而是西元 4 年才是甲子年，所以，必須將餘數各減 3，1 減 3 是-2，而序數-2 就是 11 減 3 所得的序數 8，所以，是辛；3 減去 3 是 0，就地支而言，也就是 12，所以是亥，得 1911 年爲辛亥年。

Method 2：1911 先減去 3，再除以 10 與 12，分別得到天干序數 8、地支序數 12→得 1911 年爲辛亥年。

層面三：天之曆數在爾躬

這部份作者以政治的觀點引入：中國的改曆往往有政治味，尤以漢朝太

史令司馬遷及唐朝第一位女皇帝武則天的改曆最著名。前者由於太史令司馬遷發現武帝元封七年，過去的陰曆剛好是冬至，也是週期開始的甲子日，加上歲星(木星)的位置和地支無法相對應，因此決定改曆。由於陰陽合曆每 19 年要閏 7 次，但回歸年平均有$365\frac{1}{4}$日，因此，將 19 乘以 4 得 76，再加上天干地支的週期循環：76 乘以 60 得 4560 這一個大週期，但漢武帝不接受 4560，而是接受曆官鄧平的 4617，4617 剛好是 243 個 19 年，所以，19 年置 7 閏的規定不必改。另外，4617 年共有$365\frac{1}{4}\times 4617 = 1686359\frac{1}{4}$(日)，若將此數加上$\frac{3}{4}$日就可讓 60 整除，符合干支紀日的週期，如此 4617 年就是一個大週期, 不但太陽、月亮回到原點，干支紀日也重新開始。除此之外，由於 4617 年可湊成 1686360 日、4617 年共有 235×243=57105 的月，因此$\frac{1686360}{57105} = 29\frac{43}{81}$(日)。由於武帝認爲分母 81 合天又合律 (合於音樂的節拍)，因此，他採用鄧平的說法作爲新曆的基本原理。

另一方面，武則天建立了新朝代周朝。許多開國君主事先稱帝，後確定曆法，然後萬民來歸；武則天則是先控制朝政，再改曆，最後稱帝。但武則天建立的新周朝，卻因爲皇位繼承問題恢復原來的唐曆，在改回唐曆的過程中，武則天創了中國史上最長的一年 444 日，由於必須由周曆回唐曆，於是，武則天於 700 年 10 月 10 日下詔明年恢復「建寅」，以 1 月 1 日爲歲首，這一年不但多出了 11 月及 12 月，剛好又有閏 7 月，所以，共有 444 日。

層面四：曆的數學

曆法牽涉到許多週期，在這些週期中，相關天體的位置，亦即週期的餘數可反推上一次各週期餘數全歸零的年代。除此之外，由於曆法必須基於天文的觀測，然而從有限次的觀測推算天體的運行，必須使用數學內插法的技巧

作者在這部份將曆與數學做結合：介紹餘數定理，由天干地支的算法引入韓信點兵：三三數之餘一，五五數之餘二，七七數之餘一，求兵總數；再由此問題引入餘數定理的一般式。

此外，他也提及萬年曆的製作方法和元旦與星期的關係：若是在二十一世紀的任何一年，$2000 + x(1 \le x \le 100)$，$x + \left[\frac{x-1}{4}\right]$ (7)，其中 (7) 表示要以 7 除之，取餘數即爲元旦的星期；若不是在二十一世紀，則年以$100y + x$表示，$5y + \left[\frac{y}{4}\right] + x + \left[\frac{x-1}{4}\right]$ (7)，同樣取餘數即爲元旦的星期。

三、評論

本書不只提及月曆與數學的關係，所穿插的歷史與背景，也表現出作者對數學與數學教育的洞識。此外，作者在書中也介紹了許多天文知識 (如黃道與天球赤道的關係) 以及不同的紀年方法，豐富了我們對曆法－文化活動中的數學的想像與認識。

本書出現的人名、書名或是一些定律，作者都會非常貼心的附上解釋，例如講到日蝕與月蝕，下一頁就會解釋日蝕與月蝕發生的時刻；作者也將 24 個中節氣作成一個表格 (頁 34)，讓讀者可以一目了然。另外，本書各章節的鋪陳方式，由利瑪竇與徐光啓的談話對照出中西曆的相異處，接著，談論各曆的發展與共通點，以及不同朝代會因爲政治因素而改曆，最後，再結合數學與月曆。這在思考邏輯的部份具有完善的整體性。

本書的專有名詞較多，如果讀者尚未熟悉，則會較難以理解陳述的部份，加上本書的鋪陳是有順序而非斷斷續續，因此，在前幾個章節若尚未確實了解，閱讀後面的章節會感到無法連貫而卻步。

優秀數學科普作品指標

指標以五顆星☆☆☆☆☆爲最高品質

1. 知識的實質內容（Intellectual substance of knowledge）

(1)認識論面向(Epistemological aspect)：☆☆☆

(2)歷史或演化面向(Historical or evolutionary aspect)：☆☆

(3)哲學面向(Philosophical aspect)：☆

(4)教育改革面向(Education reform aspect)：☆☆☆

2. 形式或表達（Form or representation）

(1)創新手法(Innovative approach: new story on old stuffs)：☆☆☆

(2)數學知識的洞察力(Insight into mathematical knowledge: inspiring and revealing)：☆☆☆☆

(3)忠實可靠的參考文獻(Integrity with references)：☆☆☆

(4)敘事的趣味性、可及性及一慣性(Narrative in an interesting accessible and coherent way)：☆☆☆☆

3. 內容與形式如何平衡（Balance in Content vs. Form ）：針對下列三個年齡層閱聽大眾，考量（知識活動）內容與形式（包裝）的不同平衡點。

(1)兒童層次(for kids)：☆☆

(2)青少年層次(for adolescence)：☆☆☆☆

(3)一般大眾社會(for general public)：☆☆☆

4. 摘路本書最精采片段（excerpt from the most exciting passage）

令 $f(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 。我們列個表：

n	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$f(n)$	0	1	5	14	30	55$\cdots$	
$\Delta f(n)$	1	4	9	16	25	$\cdots$	
$\Delta^2 f(n)$	3	5	7	9	$\cdots$		
$\Delta^3 f(n)$	2	2	2	$\cdots$			
$\Delta^4 f(n)$	0	0	$\cdots$				

在這個表中， $\Delta f(n)=f(n+1)-f(n)$ ，它是 f 函數在相鄰兩數之值的差；$\Delta^2 f(n)=\Delta f(n+1)-\Delta f(n)$ ，它是差的差，二階的差。你看，到了二階，數值 3、5、7、9$\cdots$已經是等差，所以稱$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$爲二階等差級數。當然 $1+2+3+\cdots+n$ 爲一階等差級數，也就是一般所說的等差級數。我們知道 $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ ；一階等差級數的和是 n 的二次式。假定二階等差級數的和是三次式： $f(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=an^3+bn^2+cn+d$

由
$$\begin{aligned}
f(0)&=d=0\\
f(1)&=a+b+c+d=1\\
f(2)&=8a+4b+2c+d=5\\
f(3)&=27a+9b+3c+d=14
\end{aligned}$$

得
$$\begin{aligned}
\Delta f(0)&=f(1)-f(0)=a+b+c=1\\
\Delta f(1)&=f(2)-f(1)=7a+3b+c=4\\
\Delta f(2)&=f(3)-f(2)=19a+5b+c=9\\
\Delta^2 f(0)&=\Delta f(1)-\Delta f(0)=6a+2b=3\\
\Delta^2 f(1)&=\Delta f(2)-\Delta f(1)=12a+2b=5\\
\Delta^3 f(0)&=\Delta^2 f(1)-\Delta^2 f(0)=6a=2
\end{aligned}$$

所以 $a=\frac{1}{3}$、$b=\frac{1}{2}$、$c=\frac{1}{6}$、$d=0$

$$f(n)=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

這就是我們所熟悉的平方和公式。你看，上面這些以 a 、 b 、 c 、 d 爲未知數的方程式，它們等號右邊出現的數值，就是表中我用虛線框起來的數值。而 a 、 b 、 c 、 d 的答案其實只和 $f(0)$ 、 $\Delta f(0)$ 、 $\Delta^2 f(0)$ 、 $\Delta^3 f(0)$ 有關：

$$a = \frac{1}{6}\Delta^3 f(0)$$
$$b = \frac{1}{2}(\Delta^2 f(0) - \Delta^3 f(0))$$
$$c = \Delta f(0) - \frac{1}{6}\Delta^3 f(0) - \frac{1}{2}(\Delta^2 f(0) - \Delta^3 f(0))$$
$$d = f(0)$$

一般的高階等差級數理論說：

$$f(n) = \binom{n}{0} f(0) + \binom{n}{1}\Delta f(0) + \binom{n}{2}\Delta^2 f(0) + \binom{n}{3}\Delta^3 f(0) + \cdots$$

當階數為 2 時，$\Delta^4 f(0) = \Delta^5 f(0) = \cdots = 0$，所以上式中的「$\cdots\cdots$」都是 0。如 $f(n) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$，我們就得到平方和公式為

$$f(n) = 1 \cdot 0 + n \cdot 1 + \frac{1}{2} n(n+1) \cdot 3 + \frac{1}{6} n(n-1)(n-2) \cdot 2 = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$$

如果 $f(n) = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ 是立方和，一樣列表，你可算得 $f(0) = 0$，$\Delta f(0) = 1$，$\Delta^2 f(0) = 7$，$\Delta^3 f(0) = 12$，$\Delta^4 f(0) = 6$，因此

$$f(n) = \binom{n}{1} \cdot 1 + \binom{n}{2} \cdot 7 + \binom{n}{3} \cdot 12 + \binom{n}{4} \cdot 6 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

(頁 190~192)