

跨越數學高峰

蔡育知

台灣師大數學系畢

書名：征服數學的 15 座高峰：趣味數理知識入門 (Climbing 15 Hills of Mathematics)

作者：伊庫納契夫

譯者：陳朝銀

出版社：良品文化

出版日期：2004 年 09 月 初版

出版資料：平裝 175 頁 定價新台幣 180 元

ISBN：957-29548-7-3



一、前言

「『算』數學，太難；『玩』數學，有趣多了！俄國知名科普作家伊庫納契夫，將生活的點滴化成一道道數學謎題，讓你在一次次絞盡腦汁與恍然大悟間，愛上數學的奧妙。」(取自：封面)。而當筆者仔細翻閱本書，可以知道本書所說的「玩」數學是仍須一番的對數學的功力與思考的，恰如其名的需要「跨越高峰」的想像。

而書中的「十五座高峰」所代表的恰是本書中的十五章：〈生活中的奇妙數學〉、〈神奇的火柴棒〉、〈想法和數學〉、〈渡河與旅行〉、〈分配問題〉、〈童話故事〉、〈折紙的藝術〉、〈魔術中的數學〉、〈猜數字遊戲〉、〈三個5的變化〉、〈更有趣的遊戲〉、〈白棋與黑棋〉、〈西洋棋中的數學〉、〈數的正方形〉、〈一筆劃問題〉。並且在本書的每章亦介紹了山中沿途的「風景名勝」，再附上「登山指南」；給了對攀登此15座山峰有恐懼的人們另一道曙光。

需提醒讀者的是，本書內容與其他趣味數學著稱的書有著極大的區別，尤其需要頭腦的挑戰與多方的思考，而其〈前言〉也指出：「有的問題，則是需要嚴謹的邏輯推理才能獲得答案。所以想征服這十五座高峰並不容易。」總之，論及登此高峰，還是得自行攀登上去，才能了解山景之優美與大地造山的神聖，從中體會一山仍有一山高。

二、內容簡介

正如作者在「前言」所提及，我們可以從他大致的介紹與其著重點中看出，《征服數學的15座高峰》是一本有深度的趣味的科普書籍，乍看之下體會不及，但是深入閱讀之後就能多有所體悟。它不像一些現今許多暢銷的趣味數學科普書籍，直接以「為什麼」切入，而是採用鋪陳的方式後，再將困難點提出。觀其內容深度至少需一個非常靈活的國中數學頭腦，才有辦法較順利登山。在此，筆者將此書的「15座高峰」做了新解，將15個章節改以攀登山峰的過程為比喻，區分成以下幾個部份，而呈現出另一番登山的小宇宙。

讀者可從本書1至2章〈生活中的奇妙數學〉、〈神奇的火柴棒〉的小山訓練開始，先在山區坡度緩的地方慢跑，感受山林、培養登山興趣外，也可用以訓練體力，當作一種趣味的休閒可也。舉第3題來說，似乎就是個趣味的腦筋急轉彎：「請問，不運用加減乘除等這些計算方式，怎樣使666增加1.5倍？」，而在〈神奇的火柴棒〉就是親自讓你動手操作火柴棒，在火柴的變動中感受數學的趣味。

而在體會登山的趣味後，緊接著，你就可以背起背包，邁向3~6章〈想法和數學〉、〈渡河與旅行〉、〈分配問題〉、〈童話故事〉等坡度較高的地方，其中尤以〈童話故事〉的最具特色，它運用故事性的敘述劇情帶出攀登數學高峰的高潮，

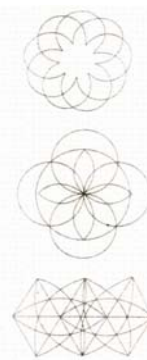
譬如其第 57 題的「天鵝與鶴」(頁 76-79)，就讓數學問題呈現更多元的故事面貌。此外，它也具有極大的挑戰性，譬如第 72 題「誰是誰的妻子」(頁 97)：

有三個農夫，伊凡、彼得和亞力克，它們分別帶著自己的妻子到市場去購買商品。而且這三個女人只知道她們的名字是：瑪麗亞、卡狄娜和安娜，至於她們誰是誰的妻子就不得而知了，只能從下面的條件中來推測：假設他們 6 個人，每人花在買商品的錢金額等於商品數量的平方，而且每個丈夫比自己的妻子要多用 48 戈比。現在，伊凡比卡狄娜多買了 9 件商品，彼得又比瑪麗亞多買了 7 件商品。請問，你知道究竟誰是誰的妻子嗎？

此題如果沒有想到適當方法，一般人甚至會假設 6 個未知數切入而不得其門徑。然而，只要適當地運用平方差公式的拆解，很快的就可以找到適當的幾組解，去除掉不正確解的部份居然可旋即獲得解答。然而，困難點在於：除非讀者是對數學非常有興趣或是對平方差公式印象極度清晰，否則以這樣的文字應用題，要構思出這樣的想法實非容易。

而在半山腰的過程中，你也許就會看到或發現許多不曾看過的有趣的現象，因而對高山有了更高的嚮往。正如第 7 至 11 章的〈折紙的藝術〉、〈魔術中的數學〉、〈猜數字遊戲〉、〈三個 5 的變化〉、〈更有趣的遊戲〉一樣，登山者可以享受宿營、溯溪的樂趣，亦或是平地或小丘所見不到的風景，類似 76 題的「正三角形」(頁 113)：「請試著用一張正方形的紙折成一個正三角形」的題組就不乏是一種一直可遊戲下去的過程，在第 94 題的「誰選了偶數？」就呈現了數字的魔幻與變化。筆者很喜歡作者添加在「風景名勝」所寫的插曲：「1 公里和 1 海裡，哪一個長？」；「馬拉松賽程的距離是 42.195 公里，而不是整數，請問：這是怎麼來的？」這些與數學相關的提醒，似乎就像是山上的標示牌，讓你在山中除了觀雲與旅遊外更長知識。

12 至 13 章〈白棋與黑棋〉、〈西洋棋中的數學〉以及第 14 至 15 章〈數的正方形〉、〈一筆劃問題〉，恰似登頂與返家的過程。登山中除了作為三、五好友心思的共享的園地外，亦可在山上享受俯瞰地勢、了解佈局的興味。而在返家的過程中，除了感受登頂後之悠悠然心情外，沿路欣賞美麗風光亦是重點。然而可惜的是，本書在 12 至 13 章的題目多著重在個人思考以及棋子該如何移動才會獲得所要的結果，如能再加一些類似 13 章第 115 題：「請問，在西洋棋盤上至少要擺幾個棋子，才會使骨牌一張也排不上去？」等較有趣的題目，或許會給人更佳的印象。而本書最後是以一筆劃問題結尾，特別選用美麗的圖形(如圖一)悠然返家，不但留給人們許多美麗的記憶，亦讓許多不曾知道一筆劃問題的



《圖一》火柴棒作成的酒杯(頁 173)。

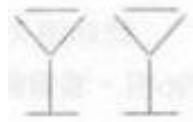
人們增長了再次登山的期盼。

三、評論

本書與《趣味的數學(二)¹》與《生活中的中學數學²》等，有著異曲同工之妙，這些早期的趣味科普在題目上，較現今的書籍更具數學的深度與思考力。且非常難得的是，本書除了含括早期數學科普書的優點外，更加入了現代的動動腦與多元思考題目，而在全書的安排設計上，還特別以「征服數學的高峰」為主軸，書名恰好符合現今許多學子對數學艱難攀爬的印象，也因此吸引起許多學子的興趣。

翻開其中的內容，筆者也發現有些題目是非常有可能會出現在國中基測中的，例如 53 至 56 題的「分酒問題」就是其一，而此問題亦曾成為科展的寵兒，對此有興趣者，可參考王琳在國中時的科展³，而從登山指南中還可看到此章的解答幾乎每題至少有兩解，不但顯露問題可有多面向的解題外，更進一步為數學思考的解題非單一做了詮釋。另外，本書在數學的思考往往在經過轉個角度就能更為順暢，更可包容許多種其他的看法的產生；舉第 2 題的「分割馬蹄鐵」的部份：「請你想想，怎樣用斧頭只砍兩下，就把馬蹄鐵分成 6 塊呢？」就有許多砍切的方式，而〈神奇的火柴棒〉在筆者自己操作過後，也發現其中有許多題是有多樣的移動方式，歡迎有興趣的讀者不妨翻閱其中的內容。

然而，本書當然不可避免的有些小錯誤，舉第 12 題為例：「用 10 根火柴棒作成兩個酒杯，請想辦法移動其中的 6 根，把酒杯變成房屋。」(圖二)，然而，如果由你來安排這些火柴棒，你會發現這些線段讓人不知所措，並且在對照解答圖示後，更發現此如果嚴謹而言並未有解答。而像是第 57 題〈天鵝與鶴〉中，天鵝就說：「如果把我們的隻數加上同樣的數目，再加上同樣的數目，再加上我們的半數和四分之一，最後還要加上你，才會有 100 隻。...猜猜看，我們這一群到底有多少隻天鵝？」(頁 76)，許些人看到此題，仍會在題目上有些誤解，除了正確的解答外，你甚至可能會以 $x + x + \frac{1}{2}(2x) + \frac{1}{4}(2x) + 1 = 100$ 的方式計算而得不到答案，會出錯的原因落在語句上的多層次敘述所產生的誤解，每個地方的「我們」可能有不同的意義，而非數學的理解；而第 51 題〈兩位樵夫〉的故事中，獵人拿出 11 枚銅幣，交給兩位樵夫說：「請兩位先生原諒，我身上就只有這麼多錢，請你們兩平分了吧！」這裡「平分」的意義，對每人而言可能又有所不同了，而作者在此的解答則是以單一



《圖二》火柴棒作成的酒杯(頁 19)。

¹ 戴禮，《趣味的數學(二)》，台北：國語日報出版社，1993。

² 張奠宙，戴再平等編，《生活中的中學數學》，台北：九章出版社，1997。

³ 王琳，〈分水的藝術〉，中華民國第四十五屆中小學科學展覽會參展作品，2005。上網時間：98

解釋處理，產生部分題目陳述不清的瑕疵。又如第 110 題的「獨角仙」(頁 160)：「假如你抓到二十五隻獨角仙，把它們放在大型的西洋棋盤上 5×5 的部份。每格各放一隻，如果獨角仙會往水平或垂直的方向進入到鄰近的格子裡，這時會不會有空格出現呢？」這個題目就讓人感到有點不知所云而不知如何著手進行。

在此亦附帶一提本書最末的〈一筆劃問題〉，這類題集在很早之前就屬於趣味數學或圖論的範疇，作者非常用心的將其基本知識在文中略提後，以絢麗的弧形造型提問哪些圖形是一筆劃，除了解一筆劃問題外，圖形有部份是間接呈現擺線齒輪形成的路徑，以及圓弧直線對稱組合造型，這些所產生的幾何之美非常難得(圖一)，只有占 2 面篇幅，也缺少介紹，的確有點可惜。

略去筆者先前所提的小瑕疵，《征服數學的 15 座中高峰》的確是一本呈現數學多元與方面思考的科普書，除了趣味外，更難得的是他的深度與內涵內容，此對於喜歡挑戰與征服數學的讀者而言正是課外閱讀的極佳選擇。山峰有高有低，地形有的深峻有的平緩，看個人的喜好而定，有人喜歡在山泉溪水，有人喜歡冒險，而有人愛看針葉林帶，當然亦會有人喜歡那闊葉林。書中的 15 章各有各的樣貌，就如高山各有風貌與高低；而在學習數學的過程中，征服數學有時就真如征服山林般 -- 有其中的趣味，其中的艱辛。

優秀數學科普作品的指標 (暫訂)

Indicators for good popular mathematics books (tentative)

評價方式：指標以五顆星★★★★★為最高品質。

1. 知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)

- (1) 認識論面向 (Epistemological aspect)：★★
- (3) 歷史或演化面向 (Historical or evolutionary aspect)：★
- (4) 哲學面向 (Philosophical aspect)：★
- (5) 教育改革面向 (Education reform aspect)：★★★★

2. 形式或表達 (Form or representation)

- (1) 創新手法 (Innovative approach: new story on old stuffs)：★★★★
- (2) 數學知識的洞察力 (Insight into mathematical knowledge: inspiring and revealing)：★★★★
- (3) 忠實可靠的參考文獻 (Integrity with references)：未附文獻
- (4) 敘事的趣味性、可及性與一貫性 (Narrative in an interesting, accessible and coherent way)：★★★★

3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form)：針對下列三個年齡層閱讀大眾，考量(知識活動)內容與形式(包裝)的不同平衡點。

年 4 月 16 日。(網址：<http://163.26.193.2/math/asset/45/030412.pdf>)

(1) 兒童層次 (for kids) : ★

(1) 青少年層次 (for adolescence) : ★★★★★

(2) 一般社會大眾 (for general public) : ★★★★★

4. 摘錄本書最精采片段：

婆羅門有一位叫西薩的祭司，他發明了西洋棋這種遊戲。在西洋棋裡，國王固然十分重要，但仍需要士兵和其他的護衛們的協助才能獲得勝利。他發明這種遊戲，是爲了給他的國王希朗做爲消遣之用。希朗國王非常喜歡西薩所發明的這個遊戲，爲了答謝這位祭師，國王非常慷慨地對西薩說：「你想要什麼，寡人就給你什麼。」

「那麼，」西薩略爲思考就回答說：「請陛下在這個西洋棋盤的第一格裡放一粒麥子，在第二格放二粒，第三格放四粒，第四格放八粒……以此類推，直到第六十四格爲止，每一格所放的麥子數量都是前一格的兩倍，這樣我就心滿意足了。」

這個看似簡單的要求，即使是貴爲一國之軍的希朗國王也做不到，因爲要放滿六十四個格子，所需要的麥粒加起來高達二十位數。也就是說，如果要滿足西薩的這個「小小的心願」希朗國王必須在整個地球的表面上播八次種，收割八次才行，否則是無法滿足西薩所提出的要求。

從這個傳說中，我們得了一個教訓，那就是話千萬不能隨便亂說，因爲說起來容易，要做到就非常困難了。(頁 158)