

評介《數學悠哉遊》

陳敏皓

國立清華大學歷史所博士班

國立蘭陽女中數學教師

書名：數學悠哉遊

作者：許介彥

出版社：三民書局

出版年代：2008

出版資料：平裝本 305 頁，初版二刷

國際書碼：ISBN 9571441708



一、前言

《數學悠哉遊》全書的兩大支柱為離散數學與數論，從中可以發現許老師的研究重心與方向，其中的 16 篇文章曾發表於國內的《科學月刊》和《科學教育月刊》，其餘為其新作品，至於詳細對照資料可參閱其學術期刊網頁 <http://ee.dyu.edu.tw/index.php?num=4&f>，因此，本書的付梓可以看出作者的學術心路歷程，而其內容層次適宜中學數學程度，非常貼切學生的課外數學自修之用。筆者不揣簡陋，談談讀書淺見，以為介紹。

二、簡述內容架構

本書共 305 頁，共分 21 個子單元，每個子單元約為 12-15 頁，目次如下：

第一編 離散數學	頁碼
----------	----

1. 鴿子與籠子	pp. 1-14
2. 遞迴函數	pp. 15-24
3. 遞迴關係與計數問題	pp. 25-46
4. 幾乎每個數都有 3	pp. 47-54
5. 遞迴點線面	pp. 55-64
6. 慎用數學歸納法	pp. 65-76
7. Catalan Number	pp. 77-94
8. 河內塔問題	pp. 95-108
9. 生成函數	pp.109-128
10. 條條大路通羅馬	pp.129-144
11. 線性遞迴的求解	pp.145-154
12. 跌跌撞撞的機率	pp.155-166
13. 用畫筆解數學問題	pp.167-184
14. Graph 與益智問題	pp.185-200
15. 不一樣的鴿籠原理	pp.201-212
第二編 數論	
16. 神奇的數字 9	pp. 213-224
17. 最大公因數	pp. 225-238
18. 數不盡的質數	pp. 239-252
19. 完美的數	pp. 253-266
20. 多角數	pp. 267-282
21. 同餘與模算術	pp. 283-300
部分習題的答案與提示	pp. 301-302
參考書目	pp. 303-305

從上表格得知，本書所涵蓋的數學定理有鴿籠原理 (Pigeonhole Principle) 或抽屜原理 (Drawer Principle or Box Principle)、二項式定理 (Binomial Theorem)、碎形理論 (Fractal Theorem)、輾轉相除法理論 (Euclidean Algorithm)、模數理論 (Modular Theorem)、數學歸納法 (Mathematical Induction)、圖論 (Graph Theory)；利用的函數有遞迴函數 (Recurrent Function)、生成函數 (Generating Function)、天花板函數 (Ceiling Function)，所以，書中文章內容大都是屬於高中數學到大一數學之間。因此，本書挺適合高中數學教師閱讀或推廣之用，另書末附上完整參考書目，大都是離散、數論、電腦科學等西文書單，值得讀者留心！

筆者茲就其中幾個單元，提出一己之淺見，順便補充一些相關的學術訊息，供讀者參酌。

三、寫作風格

筆者仔細閱讀此書後，歸納幾點作者的寫作風格，如下所述：

(一) 首列引文

例如，在第二篇〈遞迴函數〉的引言：「中國人老早就有遞迴的概念了；愚公移山的故事不就說了：子可生孫，孫又生子；子又有子，子又有孫；子子孫孫，無窮匱也。」我個人認為這是一個很傳神的隱喻 (Metaphor)，即使沒有接觸過遞迴函數，也會對其生生不息的概念，產生具體的學習想像力 (Imagination)。

(二) 擅用數學實例

例如，在第十四篇〈Graph 與益智問題〉中，作者列舉幾個與圖論相關的數學遊戲實例，有騎士問題、翻硬幣問題、渡河問題、河內塔問題等，這種舉例的寫作風格，對於任何年齡層的讀者都是具有吸引力的，俗諺云：「任何年齡層的人，都會喜歡聽故事。」如同「任何年齡層喜歡數學的人，都會喜歡數學遊戲。」其中關於騎士問題，有興趣的讀者可參考 <http://www.mindbluff.com/askchess.htm> 網頁，順便練練自己的應變力！

(三) 辨別數學的一般化 (Generalization) 與特殊化 (Specialization)：

筆者觀察作者的寫作風格，文中具有強烈的數學思維，例如：作者強調數學的一般化與特殊化，其中列舉一般化的最深刻實例，就是費伯納西數列

(Fibonacci Sequence)，¹即將 $f_n = \begin{cases} 0, n=0 \\ 1, n=1 \\ f_{n-2} + f_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}, n \in N \cup \{0\}$ ，轉成一般式

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], n \in N \cup \{0\}$$

數學入門的基礎功夫；

至於特殊化的例子，可以參考文中第 263 頁的梅森質數 (Mersenne Prime)， $M_p = 2^p - 1, p \in \text{prime}$ ，這是一種特殊的質數表達方式，雖不具一般化，例如： $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$ 就是一個合數，但是，往往這類特殊想法的出現，會無心插柳成蔭，另闢蹊徑，成數學一個新領域。

(四) 加入練習題

數學科普作家，往往可大略分成兩大類，一是數學教育工作者，一是科學相關文化工作者，如果屬於前者，其科普作品除了分享專文外，另一更崇高的想法可能是爲了提升國民的素養能力，因此，當讀者閱讀專文後，自己若能有練習題可供操作，常常會有意想不到的收穫與樂趣，而練習題有時也是作者的伏筆所在，例如：在第十八篇〈數不盡的質數〉中，作者用心舉出六個題型來證明質數的無窮多個，相信親自解練習題的讀者必定獲益不少；至於練習題出現的寫作模式可參閱 Lucas N. H. Bunt, Philip S. Jones, Jack D. Bedient (1988), *The Historical Roots of Elementary Mathematics*，該書中的練習題深入簡出，頗能引發學習動機，對於數學著作的銷售量具有枯木回春之效，而中文著作的數學練習題，以沈康身

¹ 費伯納西數列 (Fibonacci Sequence) 出自《計算之書》(Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation) 第十二章的第七部分 (第 474 頁)，中文版於 2008 年 1 月從北京科學出版社發行，翻譯者爲紀志剛教授、汪曉勤、馬丁玲、鄭方磊等。

的《中算導論》為學界翹楚。

(五) 數學家語錄作結語

作者很博雅地在每篇文末列舉數學家語錄，例如，在第十二篇〈跌跌撞撞的機率〉尾聲，舉出 George Pólya：

Mathematics is the cheapest science. Unlike physics or chemistry, it does not require any expensive equipment. All one needs for mathematics is a pencil and paper.

上述這段話，相信大家必定不陌生，只是不確定是何人話語罷了！關於數學家語錄，<http://math.furman.edu/~mwoodard/mqs/mquot.shtml> 是個值得參考的網頁，想要找任何數學家的語錄，只需確認數學家的英文姓名，輸入後便能順利找出相關語錄。

四、討論與補充

筆者針對此書內容，來個錦上添花，也更充實讀者的相關數學的學術訊息：

(一) 可增加數學史的潤飾：

套一句師大數學系教授洪萬生的名言：「循著歷史的軌跡介紹數學，這種進路是理解、深入體會數學的最佳途徑。」關於數學史的網頁，我推薦 The MacTutor History of Mathematics archive，網址為 <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/>，讀者可參閱國立台南一中數學教師林倉億在台灣數學博物館的簡介，網址為 http://museum.math.ntnu.edu.tw/view.php?class=bo_wu_guan_lian_jie。

(二) 補充第四篇〈幾乎每個數都有 3〉：

《數學傳播》第 30 卷第 2 期，吳振奎教授從八個數學面向來談論 3，分別是「整數的一種分拆」、「 $\sqrt[n]{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) 的最大值」、「六個人中的三位」、「三工廠的水、電、氣管線」、「可鋪滿平面的正多邊形僅有 3 種」、「 $3x + 1$ 問題」、「費馬(Fermat) 大定理」、「三等分任意角與尺規作圖三大難題」等數學文化面向出發，更能豐富數字 3 的性質。

(三) 關於生成函數的補充：

生成函數是遞迴關係的橋樑、是冪級數解題的基礎。本書作者解釋了生成函數的定義：

假設 a_0, a_1, a_2, \dots 為任意數列(項數可為有限或無限)，我們可以定義函數 $G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ 為此數列的「生成函數」。

作者不免俗地舉出一些實例來說明生成函數的威力無窮，如果讀者意猶未盡的話，可進階詳閱張福春、曾介玖在《數學傳播》第 30 卷第 3 期的〈一般生成函數之應用〉，作者從生成函數的由來、基本性質、計數、整數分割、遞迴關係式、數列和恆等式觀點談論生成函數的應用，內容可謂極其豐富，徹底說明生成函數的魅力。

(四) 關於無窮質數的討論²

² 可參閱《天才之旅—偉大數學定理的創立》第 3 章〈歐幾里德與質數無窮論〉的內容。

質數無窮論出現在歐幾里得 (Euclid of Alexandria, 大約 325 B.C.- 265 B.C.) 的《幾何原本》(*The Elements*) 第九卷第二十個命題 (Proposition) :³

Prime numbers are more than any assigned multitude of prime numbers. (預先任意給定幾個質數, 則有比它們更多的質數。)

許老師在第十八篇〈數不盡的質數〉中除了給出好幾個質數是無窮多個的證明, 篇末也論及俄國數學家柴比雪夫 P. L. Chebyshev, 1821-1894) 質數猜想, 但是, 關於質數猜想, 最有名莫過於「哥德巴赫猜想」(Goldbach Conjecture) :⁴

每一個大於2的偶數都可以表示為兩個質數的和。

例如: $6=3+3$; $8=3+5$; $10=3+7$; $60=13+47$...

至於質數猜想的深度閱讀書籍, 筆者推薦《遇見哥德巴赫猜想》與《質數魔力(上、下)-百萬美元大挑戰》。

五、結論

總之, 我認為許介彥老師這本《數學悠哉遊》適合午後閒暇時光用輕鬆的方式閱讀, 在閱讀的過程中, 會不斷地累積自己的數學能量與蘊含, 進而悠遊在數學領域中, 有趣的是許老師並非是數學系本科畢業或教授數學系課程, 竟有如此豐厚的數學底子, 不得不令人認佩服, 也期許他的大作能如雨後春筍般不斷付梓, 嘉惠數學工作者與莘莘學子。

參考文獻

吳振奎 (2006). 〈說3〉, 《數學傳播》第30卷第2期, 頁81-90。

沈康身 (1986). 《中算導論》, 上海: 上海教育出版社。

阿波斯多羅斯·多夏狄斯 (Apostolos Doxiadis) (王維旒譯) (2002), 《遇見哥德巴赫猜想》(*Uncle Petros & Goldbach's Conjecture*), 台北: 小知堂出版社。

張福春、曾介玫 (2006). 〈一般生成函數之應用〉, 《數學傳播》第30卷第3期, 頁12-35。

德比夏爾(John Derbyshire)(陳可崗譯)(2005). 《質數魔力(上、下)-百萬美元大挑戰》(*Prime Obsession - Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*), 台北: 天下文化出版社。

William Dunham (林傑斌譯)(1995). 《天才之旅—偉大數學定理的創立》(*Journey Through Genius : The Great Theorems of Mathematics*), 台北: 牛頓出版社。

1. Lucas N. H. Bunt, Philip S. Jones, Jack D. Bedient (1988). *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. New York: Dover Publication, Inc.

³ 關於《幾何原本》的英譯全文, 可參考 <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html>。

⁴ 哥德巴赫 (Christian Goldbach, 1690-1764), 德國人, 在1742年寫信給大數學家歐拉(Leonhard Euler, 1707-1783), 提出一個質數如上的猜想, 同年6月30日, 歐拉回信表示他雖不能證明此猜想, 但他相信這個猜想是正確的。

優秀數學科普作品指標

一、評價方式

指標以五顆星 ☆☆☆☆☆ 為最高品質。

1. 知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)
 - (1) 認識論面向 (Epistemological aspect) ☆☆☆☆
 - (2) 方法論面向 ☆☆☆☆
 - (3) 歷史或演化面向 (Historical or evolutionary aspect) ☆
 - (4) 哲學面向 (Philosophical aspect) 不適用
 - (5) 教育改革面向 (Education reform aspect) 不適用
2. 形式或表達 (Form or representation)
 - (1) 創新手法 (Innovative approach: new story on old stuffs) ☆☆☆☆
 - (2) 數學知識的洞察力 (或洞識) (Insight into mathematical knowledge: inspiring and revealing) ☆☆☆☆
 - (3) 歷史事實的洞察力 (或洞識) (Historical insight or a sense of history) ☆☆
 - (4) 異文化的啟蒙意義 (Enlightening in cultural mathematics) 不適用
 - (5) 忠實可靠的參考文獻 (Integrity with references) ☆☆☆☆
 - (6) 敘事的趣味性、可及性與一貫性 (Narrative in an interesting, accessible and coherent way) ☆☆☆
 - (7) 中譯本的品質 (Quality of Chinese translation version, if needed) 不適用
3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form)
 - (1) 青少年層次 (for adolescence) ☆☆☆☆
 - (2) 一般社會大眾 (for general public) ☆☆☆
4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage) :

由於本書屬於集結性作品，每篇之間均是獨立的，不若其他科普作品往往首尾連貫且一氣呵成，因此，筆者摘錄本書最精彩部分—第九篇〈生成函數〉的節語：「生成函數的概念對初學者而言也許相當怪異，不過一旦與它相處久了，您雖不得不承認它雖然怪，卻怪得漂亮，怪得令人心服。」