

# 正七邊形不可能尺規作圖！

李建勳

台灣師大數學系所碩士班

有關正七邊形的幾何作圖問題，阿基米德和阿拉伯人都極感興趣（請參看葉吉海，〈阿拉伯的正七邊形作圖〉，《HPM 通訊》4(11)）。不過，他們都知道如何鬆弛尺規作圖的條件（請參看蘇惠玉，〈三大作圖題〉，《HPM 通訊》6(6)）。本文針對正七邊形的尺規作圖，提出不可能性的證明！

如圖一所示，

設依照書上作法可作成一正七邊形內接於一半徑為  $r$  的圓內，

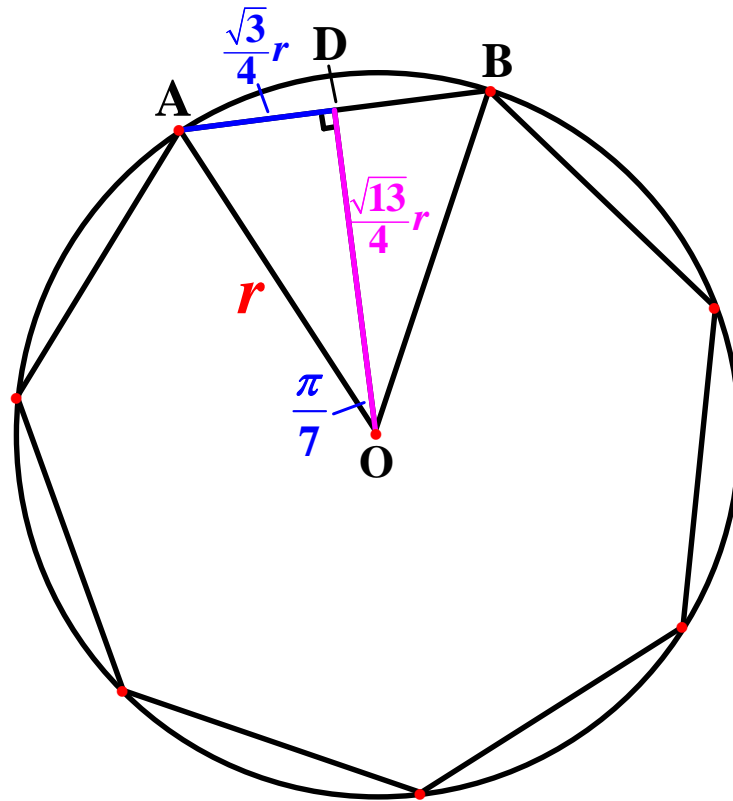
則其邊長為  $\frac{\sqrt{3}}{2}r = \overline{AB}$ ；

(1)

過圓心  $O$  作  $\overline{OD}$  垂直平分  $\overline{AB}$ ，

則  $\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{4}r$ ， $\overline{OD} = \frac{\sqrt{13}}{4}r$  且  $\sin \frac{\pi}{7} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ，

$\Rightarrow \cos \frac{2\pi}{7} = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{7} = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$  為一有理數。



圖一

(2)

如圖二，作  $\overline{BE} \perp \overline{OA}$  並交於  $E$ ，則  $\overline{BE} = r \cos \frac{2}{7}\pi$ ；

在三角形  $OAB$  中，其面積為  $\frac{1}{2}\overline{AB} \times \overline{OD} = \frac{\sqrt{39}}{16}r^2$ ，

亦可表為  $\frac{1}{2}\overline{OA} \times \overline{BE} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cos \frac{2}{7}\pi$ ，

這告訴我們  $\frac{\sqrt{39}}{16}r^2 = \frac{1}{2}r^2 \cos \frac{2}{7}\pi$ ，

即  $\cos \frac{2}{7}\pi = \frac{\sqrt{39}}{8}$  為一有理數，

顯然因  $\sqrt{39}$  為一無理數而矛盾！

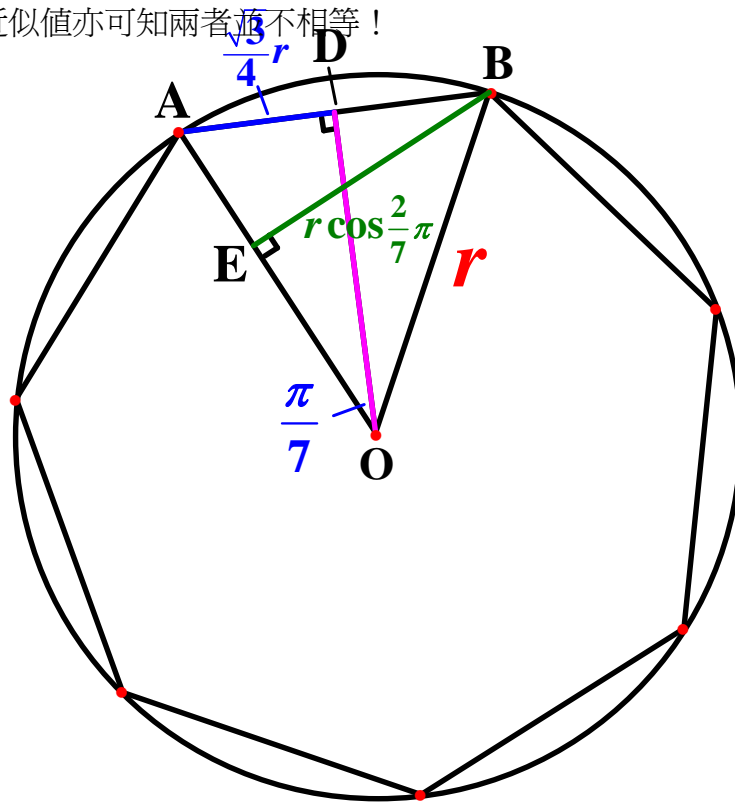
故此正七邊形作圖不成立！

附註：

$$\sin \frac{\pi}{7} \approx 0.433884$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.433013$$

經由計算得其近似值亦可知兩者並不相等！



圖二