抽象之為用：評論高爾斯的《數學極短篇》[1]

洪萬生
台灣師範大學數學系

作者：Timothy Gowers
英文書名：Mathematics: A Very Short Introduction
出版資料：New York: Oxford University Press
出版年份：2002.
出版資料：vi + 144 pp.
國際書碼：ISBN 0-19-285361-9

優秀數學科普作品的指標
Indicators for good popular mathematics books (tentative)

1. 知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)

(1) 認識論面向 (Epistemological aspect)：☆☆☆☆

(2) 歷史或演化面向 (Historical or evolutionary aspect)：☆☆☆☆

(3) 哲學面向 (Philosophical aspect)：☆☆☆

(4) 教育改革面向 (Education reform aspect)：☆

2. 形式或表達 (Form or representation)

(1) 創新手法 (Innovative approach: new story on old stuffs)：☆☆☆☆

(2) 數學知識的洞察力 (Insight into mathematical knowledge: inspiring and revealing)：☆☆☆☆

(3) 忠實可靠的參考文獻 (Integrity with references)：☆☆☆☆☆

(4) 敘事的趣味性、可及性與一貫性 (Narrative in an interesting, accessible and coherent way)：☆☆☆

3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form)：針對下列三個年齡層閱聽大眾，考量（知識活動）內容與形式（包裝）的不同平衡點。

(1) 兒童層次 (for kids)：

(2) 青少年層次 (for adolescence)：☆☆

(3) 一般社會大眾 (for general public)：☆☆☆

4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage)：

當吾人設計模型時，必須盡可能忽略表象，從中只抽取那些足以瞭解其行爲之風貌。在前述我討論過的例子中，石子被化約成單一的點，國家的全部人口被化約成爲一個數目，大腦被化約成爲服從數學法則的閘門之網路，以及兩個分子的互動被化約爲無形。因此，吾人所得到的數學結構，即是被模型化的具體情

[1] 本文根據拙文〈推薦高爾斯的《數學極短篇》〉，收入拙著《此零非比０》（台北：台灣商務印書館，2007），頁 159-164。

境之抽象表徵。

數學作爲一門抽象的學問具有兩種意義：它從一個問題中抽離出重要的風貌，同時，它處理那些非具體、摸不著的物件。下一章將討論數學的抽象性之第三個、更深刻意義，其中前一節的例子已經給了我們若干想法。譬如說吧，一個圖形 (graph) 就是擁有許多用途的極富彈性之模型。然而，當吾人研究圖形時，並不須要對這些用途念茲在茲；這是因爲那些點究竟表徵區域、演講或其他極爲不同的東西，都無所謂。職是之故，一位圖論專家可以將真實世界拋在腦後，而進入純粹抽象的領域之中。

一、前言

本書 (*Mathematics: A Very Short Introduction*) 是提摩太高爾斯 (Timothy Gowers) 所著作，收入英國牛津大學出版社「極短篇」(Very Short Introductions) 序列，以口袋書的尺寸行世。作者曾榮獲 1998 年費爾茲獎 (Fields Medal，爲數學界最高榮譽獎項，得獎者慣例不超過四十歲)，目前是英國劍橋大學 Rouse Ball 講座教授。

本書充分發揮了極短篇的特色，短小精幹、字字珠璣，而且，全篇更洋溢著偉大數學家的洞識與智慧。尤其難得的，雖然高爾斯擁有高深的數學造詣，但是，他爲文「烹煮」這種「小鮮」，卻總能深入淺出，以淺顯語言道出深刻的觀察與體會，值得從事科普寫作者引爲借鑑。

儘管如此，高爾斯卻絕不媚俗！這或許可以解釋：何以他在「自序」開場的第一句話竟然是「希爾伯特空間」(Hilbert space)。乍看之下，實在很難理解一本標榜科普的小書，會以希爾伯特 (David Hilbert, 1862-1943) 所凸顯的抽象「空間」概念開場！不過，高爾斯顯然認爲沒有必要爲了說明現代數學的精髓—「抽象化」，而做一些「童言童語」式的妥協。雖然他也因篇幅過長，而被迫割愛一些內容（參考他的個人網站：http://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10），但是，一開始他就大膽搬出希爾伯特的「抽象化」來「嚇人」，的確相當罕見！這在「科學普及」的脈絡下，大概也反映此一出版社的「專業」與「容量」，乃能接受這種書寫風格。

二、內容簡介

現在，我們就來看看高爾斯如何以「抽象（化）」來貫穿全書的前七章：

1. 模型；
2. 數目與抽象；
3. 證明；
4. 極限與無限；
5. 維度；
6. 幾何；

7. 估計與逼近。

至於第 8 章標題則是「幾個經常被詢問的問題」(Some frequently asked questions)，其中又細分成八個小節，依序分別是 (1) 數學家年滿三十表示過氣是真的嗎？(2) 女數學家爲何這麼少？(3) 數學與音樂有關連？(4) 爲甚麼這麼多人如此肯定不喜歡數學？(5) 數學家利用電算機做研究嗎？(6) 爲甚麼數學研究是可能的？(7) 著名的數學問題曾被業餘者所解決嗎？(8) 爲甚麼數學家會說某些定理與證明漂亮？我想，這八個問題一定更能夠吸引喜歡（或只能）泛泛談論數學的人，不過，爲了避免喧賓奪主，錯過了高爾斯爲我們準備的數學「精緻餐點」（或「清粥小菜」)，所以，我只在本文最後略作介紹。

有關本書章節的安排，高爾斯在他的「自序」中，提供了一個簡要的說明。正如前述，由於本書題旨是「抽象（化）」，所以，他選擇在第 2 章作一個比較「正式」的說明，不過，比較具體或貼近吾人經驗的例子，則在第 1 章中以「建模」(modeling) 方式引進。在本章中，他指出「建模」就是我們熟悉的一種抽象化，因爲在這一過程中，吾人從真實世界問題中抽取（或提煉）本質，然後，再據以將此一問題轉換成爲數學問題。然而，他爲何在第 2 章中利用數系的擴張，來說明數學及其方法的抽象化呢？我想他有關「虛數」(imaginary number) $i=\sqrt{-1}$ 之說明，就誠如他自己所說的，具體詮釋了下列這個一般性的原則，那就是：「假如一個抽象的數學建構（按：譬如「負數」、0 或「虛數」概念）足夠自然而然的話，那麼，它差不多確定可以充當一個模型來使用」(If an abstract mathematical construction is sufficiently natural, then it will almost certainly find a use as a model)。換句話說，建模與抽象化是分不開的。

一旦「抽象化」之後，數學知識的「一般性」(generalization) 也就自然而然地形成了。在這個關連下，數學證明當然有其必要性，高爾斯特別在第 3 章中，指出我們可以從中學習到的兩個教訓。在消極方面，如果吾人不證明的話，那麼，吾人可能會「愚昧地」說「假話」；而在積極方面，如果吾人企圖證明命題的話，那麼，吾人將可以完全不同、甚至於「更有趣」的方式，來了解它們。後者是目前在國際數學教育社群中，有關學生的數學論證研究之重大議題。由此可見，數學家、數學教育家乃至於數學教師對於所謂「證明」，其實有著共同的關懷，所不同的，有可能由於後者基於教育專業與實務，更加注重「一般人」的論證能力吧！

在第 4-7 章中，高爾斯轉向如極限與無限等比較特定的專題。不過，貫穿的主軸還是數學的抽象化，正如他所指出的：「抽象 (abstraction) 與延拓 (generalization) 是孿生的過程」。或許正因爲如此將導致數學的抽象性不利於學習，所以，他也一直強調：一個數學物元不在於「它是甚麼」(what it is)，而在於「它做了甚麼」(what it does)！這種擱置柏拉圖本體論的本能主張 (Platonic instincts)，也見諸於他如何說明：1.999…= 2 等等。他認爲這是一種「規約」(convention)，儘管不是可以「隨意定奪的」(arbitrary)。

以 $\sqrt{2}$ 的十進位小數表徵 (decimal representation) 1.41421356…爲例，這種規約可以允許我們將敘述句「x 是一個無限十進位小數，它的平方等於 2」，翻譯成敘述句「有一個法則可以決定對任一 n，x 的第 n 個小數位。同時，我們也可以找到任意長的有限小數，而且只要小數位足夠長，它們的平方就可以靠近 2 到達

我們喜歡的程度。」上述這個「翻譯」當然訴諸「極限」與「無限」，也是很多人學習微積分時的認知障礙。其實，若不循此途徑來理解的話，那麼，1.41421356…自乘，就必須運用「整個無限展開式」(entire infinite expansion)，而這當然不是尋常的算術運算可以應付了。於是，如果有人始終無法相信 1.999…= 2 或 0.999…= 1，也就不足爲奇了。附帶一句，最近國內外數學教育界與數學界爲了中小學教學何時引進計算器，有相當分歧的意見。我覺得正反雙方都應該舉一些試驗例子 (test case)，來強化己方的說服能力。譬如，利用計算器很難說明何以 $\frac{1}{3}\cdot 3=1$，這是不利於計算器過早引進的例子。

以上是本書第 4 章中最精采的論述。緊接著，高爾斯在本書第 5 章中介紹維度 (dimension)。顯然，這是因爲維度與高維度空間，也必須訴諸抽象化的「建模」，吾人才可望了解。針對本章的說明，高爾斯的數學哲學觀無疑是與前幾章一致，亦即：擱置柏拉圖的本體論之道德承擔，不要介意高維度譬如 26 維空間是否存在，而直接思考它的特性。在這個前提下，高爾斯得以充分利用解析幾何所引進的代數表徵，而抽象地定義高維度空間。此外，他也企圖定義維度並非正整數的空間（如 Koch 雪花等碎形空間）。

在第 5 章抽象空間的脈絡中，高爾斯決定放手一搏－在第 6 章論述幾何學！他的目標，無疑是歐式幾何 (Euclidean geometry) 與非歐幾何 (non-Euclidean geometry) 的對照。要想利用歐式幾何所表徵的模型，以解釋非歐幾何如球面幾何、雙曲幾何的「平行設準」(parallel postulate)，抽象方法所必須的（對於譬如所謂「（直）線」((straight) line) 的）「再詮釋」(re-interpretation)，當然十分關鍵。不過，如果讀者缺乏抽象化的思維能力，所謂的「幾何學」之精神與意義，大概也就無從體會了。

本書第 7 章也是非常精采的一章，高爾斯顯然認爲「估計」與「逼近」，是幫助讀者認識數學抽象化的一種「具體憑藉」。或許他認爲抽象化使數學知識遠離了人間煙火，於是，吾人必須憑藉「估計」與「逼近」，才能讓數學重新貼近吾人經驗。可惜，高爾斯在本章中大都以數論知識（譬如「質數定理」）爲例，很可能嚇退一些數學學習的恐懼者或挫敗者。不過，如果讀者願意以平常心閱讀本章，他（她）們一定可以充分體會作者的用心良苦。

本書最後一章，亦即第 8 章，是相當討喜的一章。由於高爾斯的數學成就之威望，他的回答一定很容易引起共鳴，並且成爲數學家、文化人乃至數學教師茶餘飯後的談助。嚴格說來，高爾斯針對這些問題提出了非常獨到的論述與見解，充分表現他身爲偉大數學家的深刻一面，值得我們尊重與推崇。筆者曾根據他對數學家的三十大限之宿命說的評論，寫了一篇〈懷爾斯不是天才〉，請讀者另行參考。[2]在此，筆者可以再轉述他如何解釋「很多人不喜歡數學」的可能原因。高爾斯認爲數學的有效學習，往往必須依賴學習者對於數學概念之邏輯連貫的清晰掌握，此一知識活動的特性，足以讓很多人的學習經驗產生重大挫折。至於改

[2] 收入拙著，《此零非比０》（台北：台灣商務印書館，2007），頁 310-313。懷爾斯 (Andrew Wiles) 即是在 1994 年成功地完成費馬最後定理的偉大數學家，他在 1998 年榮獲 ICM 首度頒發的費爾茲特別獎（因爲他在當年已經年逾不惑了），以表彰他的不朽貢獻。

善之道呢，高爾斯希望教育者應該體認「技術精熟」(technical fluency) 與「數學理解」(mathematical understanding)，並非可以輕易切割的一體兩面。

三、評論

本書是相當難得一見的數學極短篇。作者高爾斯的費爾茲獎之盛名，對於本書的精巧當然有加分效果，不過，作者深入淺出，說明數學知識的抽象化本質，才是我們值得仔細品味、並大力推薦的主要原因之一。

話說回來，本書之論述以數學的抽象性為尚，想必當然遏止一些缺乏數學思考力的讀者，儘管他所據以取材的例子大都相當「具體」。因此，本書對於一般讀者而言，大概還是相當「抽象」。當然，如果他們在數學學習過程中，對於「抽象」之必然有一點起碼程度的體會，那就另當別論了。

另一方面，高爾斯有關數學天才的評論，非常值得我們特別注意。因此，在此，筆者特別引述拙文〈懷爾斯不是天才〉中的一些片段，以饗讀者：

> 我們仔細閱讀《費瑪最後定理》(共有兩個版本，Simon Singh 與 Amir D. Azcel 各寫一本)，或者觀看英國 BBC 所拍攝的「費瑪最後定理」紀錄片，實在難以掌握有關懷爾斯的個人側寫，譬如他從小是數學神童或天才嗎？他贏過數學競賽（譬如 IMO）的金牌嗎？他是不是在博士論文答辯時，反過來考倒口試委員呢？
>
> 這些 20 世紀很多天才物理學家最膾炙人口的傳奇，也是現在數學家或科學家，甚至是一般社會大眾最喜歡的『茶餘飯後』，我們從懷爾斯身上好像都挖掘不到。顯然，懷爾斯的成長過程『平淡無奇』，除了他對於『費瑪最後定理』的興趣始自 10 歲之外（看來有一點早慧），其他的傳記材料實在「乏善可陳」。
>
> 現在，高爾斯終於明白地告訴我們，按照他的看法，懷爾斯根本不是一位數學天才！高爾斯說他在劍橋大學裡平均每一、兩年內，總是可以看到一位年輕的大學生，利用幾分鐘時間便輕而易舉解出一個難題，而他的老師卻往往必須花上好幾個小時甚至更久的時間才能完成。「碰到這樣的人，我們所能做的就是往後站，然後崇拜他！」可惜，高爾斯接著說，「這些不平凡的人（亦即所謂的天才），並非永遠是最成功的（研究型）數學家！」事實上，「如果你想要解一個很多其他專業數學家試過但未成功的問題，那麼，你所需要的很多（人格）特質中，上述所謂的天才特質，既不必要也不充分。」
>
> 高爾斯的例子正是懷爾斯。他認為懷爾斯的偉大成就所依賴的人格特質，並未神祕到無法理解，不過，這當然也無損懷爾斯在數學史上所奠定的不朽聲名。高爾斯承認他無法精確了解懷爾斯究竟如何成功，但懷爾斯「必定需要無上的勇氣、決心與毅力，同時，他也需要掌握前人的辛苦耕耘成果，在正確的時機選對了數學研究領域，以及擁有罕見的擬定策略之能力。」
>
> 高爾斯認為，上述這個最後的人格特質，終究是遠比怪異的心智速度 (freakish mental speed) 來得重要；在數學史上最深刻的貢獻，往往是「烏龜」

而非「兔子」所締造的。當數學家成長時，他們學習一大堆本行技能，部分來自其他數學家的研究成果，部分得自自己廢寢忘食的數學思考。至於決定他們是否利用自己的專業本事，去求解一些「惡名昭彰」的問題，大都是經過審慎的計畫，試解一些看來很有斬獲的問題，知道何時該放棄哪一路想法（常常是十分艱難的抉擇），而且，偶爾也需要在添補一些細節前，有能力抓出論證的幾條大綱領。這需要個人人格的成熟度，與天才儘管並非絕對不相容，但是，天才並不永遠都有這種特質！