

與「空無」對話：評論《從零開始》

洪萬生

台灣師範大學數學系

書名：《從零開始－追蹤零的符號與意義》

(The Nothing That Is: A Natural History of Zero)

作者：羅伯·卡普蘭 (Robert Kaplan)

譯者：陳雅雲

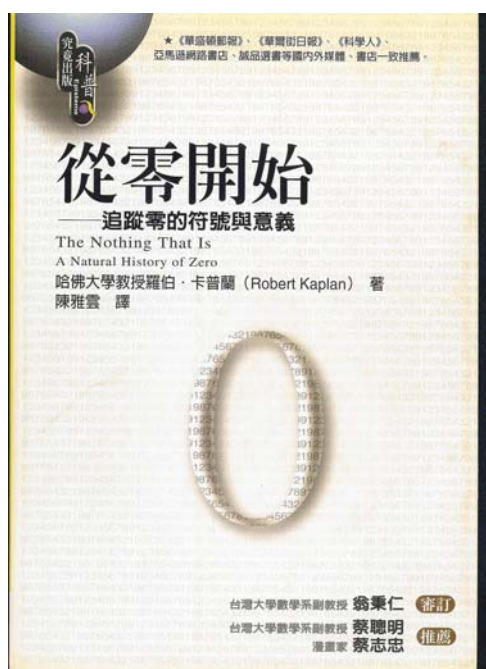
審訂：翁秉仁教授 (台大數學系)

出版：究竟出版社

出版年份：2002

出版資料：平裝本共 292 頁，定價 280 元

國際書碼：ISBN 957-607-761-3 [312]



一、前言

本書是有關數目「0」的第二本數學普及著作之中譯。這幾年來，幾個特殊的實數如圓周率 π ，尤（歐）拉數 e 與虛數 $\sqrt{-1}$ 的故事相繼登場，為數學普及書寫注入了新鮮的活力，對於有志於此道的作者，應該帶來很大的鼓舞作用。

這幾個實數是「尤（歐）拉公式」($0 = 1 + e^{\pi\sqrt{-1}}$)的主要組成部分。此一公式曾被國際數學家社群評定為最漂亮的數學公式，大概它最符合數學家所謂「簡

單而深刻」的根本要求吧。¹因此，有關 π ， e ， $\sqrt{-1}$ 與 0 的故事，都在1990年代成爲科普書寫的話題。不過，後兩者的故事遠較前二者曲折，譬如相較於 π 與 e 來說， $\sqrt{-1}$ 與 0 都花了相當長時間才獲得了「正當性」(legitimacy)。其實，數學史家也不過是在這二十年內，才比較看清楚這兩個數目的滄桑容顏，他們的研究成果，也因而惠及相關的科普著作（譬如本書）。

這應該也可以解釋：何以本書竟有218條註解，而且參考文獻更是多達232則左右，尤其包括不少古典文本（請查閱：牛津大學出版社網站）。由此，我們可以了解本書作者卡普蘭的苦心造詣。卡普蘭擁有高深數學專業，精通多國語言（包括拉丁文與梵文），同時，在哲學與各個民族（包括印度與馬雅）的歷史與（宗教）文化等方面，也有全方位的修養。更難得的，他畢生致力於推廣數學，非常樂意分享數學學習的喜悅。因此，他追隨「自然主義式」的書寫風格，文類則在敘事之外，兼採論說與抒情，從容地「追蹤零的符號與意義」。我們在捧讀本書時，難免被他「隨興」安排的岔路暫時打斷，不過，通過他的眼睛來觀察「空無」的世界，也的確令人賞心悅目。

二、內容簡介

本書17章（當然要從第0章開始）目次如下：

- 0 透鏡
- 1 心智留下的印記
- 2 零不見於希臘
- 3 無稽之談
- 4 東漸之風
- 5 塵土
- 6 進入未知的世界
- 7 典範的轉移
- 8 馬雅間奏曲
- 9 煞費苦心
- 10 款待天使
- 11 近乎空無
- 12 零存在嗎？
- 13 蜘蛛澡堂
- 14 總是午後的國度
- 15 李爾王對嗎？
- 16 無法想像

第0章既然以「透鏡」爲名，顯然意在指出「零促成數學的無限延伸與發展，而數學又反映出事物的複雜本質。」因此，追蹤 0 的符號與意義時，作者說明他將從自然主義者兼歷史學家的角度切入，引導我們進入 0 的世界。

第1章主要說明巴比倫數學家如何差一點發明了 0 —作爲一種分隔的記號。

第2章則企圖說明何以「零不見於希臘」。作者從記數 (notation) 與運算 (operation) 兩個面向著手，指出 0 這個概念在文字和思想之間轉換的困難：「想想無數難以描述的日常動作，例如用聲音來表達興趣或鄙視、綁鞋帶、訓數間好蛋餅，或是準確地投擲物品等。我們的身體知道如何執行這些動作，但若要用語

¹ 它甚至還成爲日本小說家小川洋子的《博士熱愛的算式》的靈感來源。

言仔細地描述，就可能會遭遇困難。」¹「因此，只要我們停止動作並開始思考，就會發覺介於動作與思想之間的零，令人困惑（數字到底是形容詞或名詞？）」

在第3章中，作者將歷史場景轉向古希臘的亞歷山大里亞或希臘化時期（Hellenistic Period），在幾何學家不再鄙視算術的時候，0依舊沒有現身，即使偉大數學家阿基米德（Archimedes, 287?-212 BC）在《數沙者》（The Sand-Reckoner）中估計全宇宙的沙粒大約有 10^{63} 之多，而這當然運用了他所發明的大數命名系統，而不是0與十進位制。高斯曾經推崇阿基米德說：「如果他當時發明了零，我們現在的科學不知早已進展到何種程度！」

第4-7章主要介紹印度文明中的0概念之發展，始於第4章的「東漸之風」，終於第7章的「典範之轉移」。在第4章中，作者引述直接證據，說明印度數學、天文學與占星術的希臘源頭。針對這一點，最有趣的例證，莫過於作者所引述的《方廣大莊嚴經》，其中提及成佛之前的釋迦牟尼，曾經參加競技以便獲得迎娶耶輸陀羅公主為妃，其項目就包括拘胝（即一千萬）以上的數量詞之命名，最高數到 10^{421} ，而這可能受到阿基米德《數沙者》一書的影響。在本章中，作者還介紹了公元500年左右的阿利耶波多（Aryabhata）、七世紀的婆羅摩笈多（Brahmagupta），甚至到第九世紀的摩訶毘羅（Mahavira）等數學家有關0概念的見解。這些連同十二世紀的婆什伽羅（Bhaskara II）依序認真地處理0是否可作為除數的問題，因此，一般數學史家都認為0概念源自印度。

不過，卡普蘭卻不這麼輕易認為。在「東漸之風」之後，他在第5、6章中，相當用心於闡述印度人如何繼承希臘人乃至巴比倫人的歷史軌跡。結果，當然沒有定論。儘管如此，作者還是在第7章的「典範之轉移」中，說明基於印度人的努力，從一開始只是計算板上的一種暫時的狀態——比較像行動、而非物體像動詞、而非名詞，漸漸地，「零也擺起架子，假裝自己是一個數字」，從而最後果然成爲一個數字。

第8章主要通過對馬雅文明（公元前300年—900年）的宗教信仰，以及其錯綜複雜的曆法計算，計算象徵「零神」的馬雅的零之符號。作者指出：由於「幽冥世界有九個由死神統治的黑夜眾神……祂就是『零神』。祂在亞勃曆中式時間可能停止的日子，也是大小週期的結束，即可怕的終止。如果一個人可以扮演『零』的角色——而且如果這個人可以在儀式中死亡的話——死神就會跟著死亡！這似乎就是馬雅人採取的作法。」在一種球賽的儀式中，扮演零神的俘虜（通常是戰敗的國王）最後被活活踢死！顯然，「就跟大多數的宗教一樣，這些儀式雖然無法達成目的，但仍不會改變，因為就連野蠻人也是活在希望中。」

第9章主要以阿拉伯與1200-1600年間西歐的數學發展為背景，藉著「煞費苦心」之標題，介紹此零概念如何爭取認同。²公元1202年，當費（斐）波那契《計算之書》（*Liber abacci*）問世時，也是印度阿拉伯數碼1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9和代表零概念的符號，正式傳入歐洲。本書作者指出：「有些創造歷史的人揭開了零的面貌，並將這層神秘朦朧的面紗留在當代的謎題中，然後把一無所飾的零帶入文藝復興時代，其中三位特別突出的人士：一位來自教會、一位來自聖林（Sacred Wood），以及一位白人農民之子。」而費波那契正是做出真正貢獻的那一位農民之子。不過，作者也強調印度人將零跟其他數字置於同等地位之作法，並未完全被費波那契接受。直到將近兩百年之後，1484年法國朱奎特（Nicolas

² 其中，作者也運用語源的證據，反駁小說家譚恩美有關中國人發明零的說法。請參考洪萬生，〈此零非比0〉，收入洪萬生，《此零非比0：數學、文化、歷史與教育文集》（台北：台灣商務印書館，2006），頁114-122。

Chuquet) 才將零視為真正的數，可惜，他的著作《數字學三論》(*Le triparty*) 直到他去世後才出版，因此，流傳與影響顯然受到限制。與此同時，由於商業的興起，精確的計算和正確的交易記錄之需求，刺激了商人子弟認真學習印度阿拉伯數碼及其演算法則。於是，儘管抗拒這些數碼的使用都很有正當理由，在萊許 (Gregor Reisch) 的《馬加利塔哲學》(1503) 書中一幅描述計算比賽的木版畫，還是見證了運用印度阿拉伯數碼的算法師 (algorist)，終於戰勝了算盤師 (abacist)，足見包括零的這一套數碼及其運算系統，已經走到歷史舞台的中心位置了。

在第 10 章中，作者運用「款待天使」這個比喻，在歷史的脈絡中，介紹與零有關的數學概念與運算法則。然後，又緊接著在第 11 章中，通過「近乎空無」的比喻，簡要說明萊布尼茲與牛頓所發明的微積分，乃至於數學家魯賓遜 (Abraham Robinson) 的非標準分析 (non-standard analysis)。

現在，回到經驗世界，「零存在嗎？」這是第 12 章的主題，作者企圖在本章中，討論與零息息相關的虛空概念 (請務必參考頁 142-143 中，作者所提供的「零的演進樹狀圖」)。至於在第 13、14 章中，作者則進入人文世界，考察零的象徵意義，藉以呼應先前各章有關零的宗教與文化意義。另一方面，作者在第 15 章〈李爾王對嗎？〉中，則想探究零的邏輯根源，其中論及集合論公設中的「空集合存在」時，再一次給了我們極富洞識的說明：

如果各位覺得，空集合這類事物光靠斷言就能存在的作令人困擾，……請注意任一遊戲規則或土地法，也是在預先假定它們會派上用場的前提下制定的。數學吸引人的特質之一，就是數學世界中的居民是隨著規範其行為的原則一起誕生的 (有時我們很難分辨行動者與行動：零是形容詞、名詞與動詞)。在概念上，它們跟這些原則一樣真實，但是隨著它的行為一一表，表露，它們逐漸成為這個世界的一部份。

最後，作者在本書終章〈無法想像〉反思：

我在萬物之間、時間之中完成本書。世界向四面八方延伸，、自一個沈默中心劃出它的座標，這個中心曾斷續被視為自我，它就如史蒂芬斯 (Wallace Stevens) 筆下的雪人，凝神靜聽，默默注視：「不存在的無，正是無之所在。」

三、評論

這是一本將 0 的歷史發展放置在人類文化史的脈絡中加以考察的精闢論述。除了 0 的發展之文化意義與其啟發之外，作者也藉此介紹相關的數學發展，因此，本書堪稱數學文化史之論述典範，既呈現了數學史之意義，也是難得的文化史篇章，非常值得我們鄭重推薦。

本書共有十七章，作者在安排時別出心裁，從「第 0 章」開始，而非從第 1 章。顯然，作者運用了「0」的形象比喻，說明他的敘事並非結束，反而是一個入口，引領我們進入永遠等待完成的數學風情畫之中。

就全書的論述結構來說，第 7 章 (「典範的轉移」) 是「0」的歷史之發展關鍵。在本章中，作者借用了孔恩 (Thomas Kuhn) 的「典範」(paradigm) 一詞，來表彰古印度數學家對於「0」的歷史演化之貢獻。同時，他也運用了一個「數目共和國」(Republic of Number) 的比喻，說明「0」得以入籍為此一共和國的一介公民的曲折與艱辛。此處，值得引述他的說法：

數 (目) 共和國的特色在於，如果某物成為一個數 (目)，它就必須要能和

現存的數（目）來往，至少要能和它們寒暄。它必須要能和其他數（目）以常見的方式結合。零如果要跟其他數（目）平起平坐，我們就必須瞭解如何用零來進行加減乘除的運算：這正是古印度數學家所做的事。

結果，「他們促成了一種典範的重大轉移。」

事實上，這一個歷史解釋，也呼應了數學史家、數學教育家對於數學概念本質的考察成果。換句話說，像無理數 $\sqrt{2}$ ，虛數 $\sqrt{-1}$ ，乃至於0這一類『外來』概念，在取得數目共和國的身份證之前，通常都必須先與其他數目公民建立「運算」關係，直到磨合得這些「外來客」的「身份」變明朗而熟悉時，才能通過審查而入籍成為新的公民。數學概念這種通過「關係」而確立「結構」的演化歷程，是本書最具有啓蒙意義的比喻，值得讀者，尤其是中小學的數學教師，好好地咀嚼與反思。

不過，本書作者用字遣詞時，還是盡可能避免「以今鑑古」。這種風格在介紹馬雅文明出場時，尤其顯得審慎與節制。誠然，本書第8章（〈馬雅間奏曲：計算的黑暗面〉）的確是一個間奏，因為我們無從得知馬雅人的數學遺產是否注入「0」的主流發展。無論如何，馬雅文化「充分地證明了零的觀念與符號可以在一個地區獨立發展。」這是作者的多元文化關懷之表現，只是他也強烈批判：馬雅人由於恐懼「零神」而表現的「野蠻行徑」！

本書其他章節順便論及的符號代數、微積分之發展，既有歷史的興味，也不乏發人深省的觀點，就留待讀者自行享受開卷的樂趣了。不過，由於本書內容相當博雅，譬如作者闡述數學知識結構的演化非常用心，同時，也刻意摻入相關的（宗教或神話）文化意義，所以，我們建議讀者第一次閱讀時，能夠把握本書的一些例證或例題，作為閱讀與思考的憑藉。至於本書作者在第7章錯誤地解讀了「重演說」（recapitulation），就當作賢者之失好了。還有，中譯本如能附上「索引」，那麼，閱讀起來將會有更大的幫助。不過，各章標題之中譯出奇典雅，真是中譯難得的佳作，值得我們效法與學習。

在書寫方面，非常值得引述翁秉仁教授有關本書與《零的故事》之對比。這兩本乍看之下同質性如此之高，究竟區別何在呢？翁秉仁指出：

羅伯·卡普蘭的這本書，在台灣的科普市場中，我們也許更應該將它想成是一本衝撞「科普」定義的書。基本上，《零的故事》是一本現在非常流行的科普書寫策略的展示，選一個重要有趣的觀念，將它的歷史鋪陳一番，再（經常是不甚相關地）附夾許多科學家軼事，最後將它與當今有關的顯學領域溝連一番，一本有料的柯普書就成型了。這種科普書的特色是看起來像好萊塢電影，入手容易，內容精彩，但多半殊少餘味。這樣的科普書要寫得好並容易；如果寫得好，在普及科學知識與引發熱情的功勞也可能不小。但是就跟電影還有歐洲電影、第三世界電影一樣，科普書有沒有另一種可能呢？

正因為格局開闊，功力奇高，所以，

卡普蘭的確給了我們另一本不一樣的零之觀念史。他打從一開頭以「透鏡」為象形之喻，開言「看著零，一無所有，但是透過它，我們見到全世界」，一直到全書最末以零的原點之喻，在宇宙萬物之中的作者，自況為史蒂芬斯的雪人，傾聽天籟以「無，非有無而為有」作結。整本書絕不自我設限為一本介紹數學的書，卡普蘭出入科學人文兩界，念茲在茲追索的，就只是「零」這個概念的發源、起伏、變形，與它曾帶給人類思想上的種種刺激、爭辯、

影響，然後，在最後一章以一種微微地不甘，在二十世紀的暮色中，追悼理性思辨那「諸神的黃昏」。《從零開始》其實是卡普蘭對零的沈思錄。

最後，從文化史的觀點來看，卡普蘭也對二十世紀一些西方文化英雄的啓蒙吶喊，提出了極深刻的反思。譬如，史賓格勒 (Oswald Spengler) 的《西方的沒落》一書曾就 0 的發明，充分地發揮了他的想像力與「文化使命感」：「零是卓越的抽象能力創造出來的精妙產物，對於以它為位值記數基礎的印度人來說，它正是了解存在意義的關鍵。」這是因為（如同他指出）唯有婆羅門階級的人，才會想到數目是不證自明。針對這種吶喊，卡普蘭的評論直指核心，發人深省，對於一些「不知所云、丟人現眼」的所謂文化人來說，更是足以發聾振聵：

我們現在已有充分的理由可以推翻史賓格勒的斷言，因為他的論點大多是錯誤的；此外，種族典範 (race-Ideals)、命運和浮士德的靈魂 (Faustian Soul) 等說法，在悲傷的 1918 年足以振奮人心，但在二十年後卻成為惡魔口中的言論。然而，我們之所以摒棄它們，也是因為在現今的年代中，我們的態度比較審慎，並且不信任普遍化的結果，寧可放棄它們在混亂事物時所能帶來的統一性，也不願冒險接受看似有道理的結論。在檢視印度文化之後，現在已經沒有人願意冒險附和史賓格勒的話：「唯有這種靈性才能創造出把『空無』視為真實數字的偉大概念。」

優秀數學科普作品的指標

評價方式：指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

1. 知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)

- (1) 認識論面向：☆☆☆☆
- (2) 方法論面向：☆☆☆☆☆
- (3) 歷史或演化面向：☆☆☆
- (4) 哲學面向：☆☆
- (5) 教育改革面向：☆☆☆☆
- (6) 與自然科學、人文社會乃至生活經驗的連結：☆☆☆☆☆

2. 形式或表達 (Form or representation)

- (1) 創新手法：☆☆☆☆☆
- (2) 數學知識的洞察力：☆☆☆☆☆
- (3) 歷史事實的洞察力（或洞識）：☆☆☆
- (4) 異文化的啟蒙意義：☆
- (5) 忠實可靠的參考文獻：☆☆☆☆
- (6) 敘事的趣味性、可及性與一貫性：☆☆☆☆☆
- (7) 中譯本的品質（若需要）：☆☆☆☆

3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form)

- (1) 青少年層次：☆☆☆☆☆

(2) 一般社會大眾：☆☆☆

4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage)：

數學家不會留戀過去的局部結果，而會直接發展一個全新的整體架構。這種持續不斷的抽象化過程，正是數學的精髓，它會把你領悟的事物全部加以轉化，以供更高層次的思考所用。難怪哥德會把數學家比喻為法國人，並說：「無論你告訴他們什麼，他們都會把他轉換成自己的語言，使它立即變成截然不同的東西。」(頁 68)

數(目)共和國的特色在於，如果某物成爲一個數(目)，它就必須要能和現存的數(目)來往，至少要能和它們寒暄。它必須要能和其他數(目)以常見的方式結合。零如果要跟其他數(目)平起平坐，我們就必須瞭解如何用零來進行加減乘除的運算：這正是古印度數學家所做的事。結果他們促成了一種轉移，我不想說這是一種世界觀的轉變(畢這樣說有些過時了)，我會說，他們促成了一種典範的重大轉移 — 即用一些單純的法則，來代替五花八門的作法。在由計算方法發展出初期理論之後，零和數的關係也就越來越近了。(頁 114)

在代表物體的數和代表空無的零之間，存有一道麻煩的鴻溝，隨著人們的注意力從它們的本質轉移到它們的行爲之後，這道鴻溝將會縮小。這類行爲是在方程式中發生的 — 方程式的解，亦即讓等式成立的數，有可能是零或任何一個數。既然 x 在方程式裡的值屬於同一類事物，代表零和其他數之間的差異更小了。但是在從西元 500 年到 1500 年漫長的歲月裡，真正的典範轉移是：數學長期居住的、不可見的記憶之屋，逐漸變成一個更加抽象的結構。(頁 119)