

# 最漂亮的數學公式！

洪萬生

台灣師範大學數學系

書名：The Most Beautiful Mathematical Formulas: An entertaining look at the most insightful, useful, and quirky theorems of all time

作者：Lionel Salem, Frederic Testard and Coralie Salem

出版社：New York: John Wiley & Sons, Inc. (InterEdition)

出版年份：1992 (1990)

出版資料：平裝本，共 141+xiii 頁

國際書碼：ISBN 0471-17662-1

中文版書名：最刁一尤、的數學公式

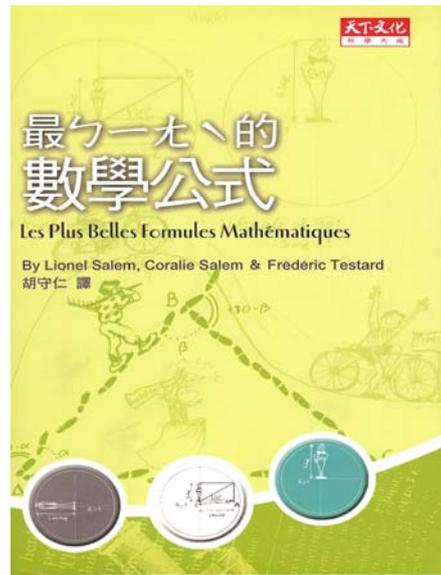
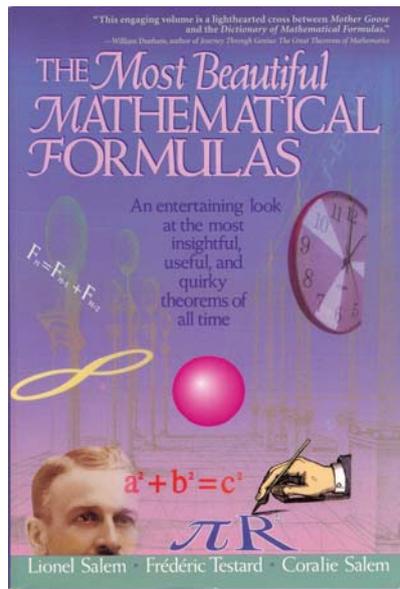
譯者：胡守仁

出版社：天下文化

出版年份：2006

出版資料：平裝本，共 198 頁

國際書碼：ISBN 986-417-700-1



## 一、前言

本書作者與插畫者有三位，依序是 Lionel Salem、Frederic Testard 和 Coralie Salem。其中 Lionel 是法國國立研究中心 (CNRS) 的理論化學家，也是一位著名的科普作家，負責卡通插畫的藝術家 Corlaie 則是他的女兒，專長為圖像設計。至於 Frederic Testard 則是出身法國高等師範大學 (Ecoles Normales Superieures)。因此，本書可以視為科學家、數學家與藝術家合作的成果。顯然，創作者希望任何人只要擁有接近數學的熱情，即可欣賞這些公式的有趣與有用。

事實上，本書撰寫時，創作者曾諮詢法國數學大師如 Henri Cartan (他的父親 Elie Cartan 是 20 世紀上半葉最偉大的數學家之一，也是陳省身的師父之一)，可見創作者之一的 Lionel Salem 之學術地位與科普作家身分，的確不是浪得虛名。

另一方面，根據本系博士生博佳佳(Charlotte Pollet) 的報告，書寫或推動數學普及，是法國科學家的任務與榮譽。這很好地解釋了何以 Lionel Salem 身為法國最高科研機構的科學家，卻同時獻身科普寫作與推廣，這一科學文化現象，非常值得我們注意。

## 二、內容簡介

本書總共收集了 49 個公式，按下列標題分類成各章（括號中的印度阿拉伯數字為各標題下的公式之序號）：

數目的乘冪 (1-2)

三角形、長方形、正方形和圓形 (3-10)

角 (11-15)

二次方程式 (16-18)

對數和指數 (19-28)

數列與級數 (29-34)

空間中的物件 (Objects in Space) (35-39)

整數、質數 (40-44)

機會（機率）(Chance) (45-47)

今日與明日…… (48-49)

由於多達 49 個公式，我們在此不打算逐一引述，而只是提及我們在下一節據以評論的公式，並強調其書寫與插畫方式。

在第 5 章（請注意本書一章介紹一個公式，篇幅頂多四頁）中，作者介紹的公式為：三角形的三內角和  $(\alpha, \beta, \gamma)$  等於  $180^\circ$ 。他們所使用的方法，是讓一位農夫繞著三角形農地的周邊走一整圈，並計算其所旋繞的角度和：

$(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) = 360^\circ$ ，於是，得證  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ 。

在第 8 章，作者介紹美國總統 Garfield 有關畢氏定理的「原創且簡單」(original and simple) 證明，並連結到第 6 章的公式： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 。在第 9-10 章，作者依序介紹圓周長與圓面積，其中訴諸腳踏車的車輪「實驗」法，後者則以古希臘阿基米德家鄉 Syracuse 全城分享蛋糕的「故事」，引進他的方法：圓面積

$A = \frac{1}{2}R \times 2\pi R$ ，亦即  $A = \pi R^2$ ，其中  $R$  為圓半徑。在第 11-13 章，作者利用虛構的餘弦學者 (Scholar Cosine) 與正弦教授 (Professor Sine)，依序介紹三角恆等式  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ 、近似公式  $\sin \alpha \approx \alpha, \cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ （當  $\alpha$  很小時），以及正弦定律  $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$ ，其中  $a, b, c$  分別是三角形的  $\alpha, \beta, \gamma$  角所對應的邊。

爲了在第 15 章引進著名的圓周率近似值  $\pi = \frac{355}{113}$ ，作者在第 14 章介紹有理數與無理數的概念，作者利用一個虛構的十七世紀荷蘭 Golden Gouda 腳踏車比賽的故事，說明  $\pi$  不等於  $22/7$  這一類的有理數。還有，作者在討論  $\pi = \frac{355}{113}$  時，使用了連分數展開式，不過，顯然他似乎並不曉得中國第五世紀的祖沖之與此有關。

在第 16-18 章，作者的主題是二次方程式，在簡要說明（第 16 章）利用配方法求導出求解公式之後，第 17 有關黃金比  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  之相關黃金矩形圖解與連分數展開式，乃至於達文西的早期繪畫〈天使報喜〉(The Annunciation) 之黃金分割卡通圖，就成爲表現的焦點。不過，在介紹虛數的誕生時（第 18 章），作者顯然給予卡丹諾過多的尊崇。

有關對數與指數的主題部份（第 19-28 章），作者先是利用面積概念介紹納丕爾 (John Napier) 在 1614 年所發明的自然對數，引進對數運算法則  $\log(ab) = \log a + \log b$ 、著名的歐拉常數 (Euler's Constant)

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right) \approx 0.577$$

、近似公式  $\log(1+x) \approx x$ （當  $x$  很小時）、

歐拉數  $e = 2.718\dots$ 、指數函數  $e^x$  的定義、導數與積分的概念（從不同觀點看面積）、 $e$  的虛數次方： $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ 、歐拉公式  $e^{i\pi} = -1$ 、以及如何利用  $e$  的虛數次方來導出  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ， $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  等等。所有這些都連結到本部份一開始的自然對數之「面積定義」。

在數列與級數 (第 29-34 章) 這一部份中，作者說明了等差級數和的公式

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

（含高斯的童年傳奇故事）、斐波那契數列

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ 、 $n$  個物件的排列法  $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ 、無窮等比級數和的公式  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$ （介紹古希臘伊利亞學派 Zeno 的悖論）、冪級數和

的公式  $1+x+x^2+\dots = \frac{1}{1-x}$ （對  $x$  的絕對值小於 1 而言），以及少數幾個無窮級

$$\text{數的和之公式如 } \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots, \log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots,$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots, e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \text{ 等。}$$

在空間的物件 (第 36-39 章) 這一部份中，作者依序說明了凸多面體的歐拉公式（或定理） $f - e + v = 2$ 、球面積公式、球體積公式、正四面體的中心角度以及鼎鼎大名的克尼斯堡七橋 (Bridges of Königsberg) 問題。針對歐拉公式，作者先從正立方體的例子確認此一公式，再利用「變換」它到四面體的過程中，加

減稜線與頂點的不變，而驗證四面體的例子也正確無誤。有關球表面積，作者則利用地球面投影到圓柱面的構想，計算圓柱的側面積而求得了球的表面積公式。至於球的體積公式，則利用阿基米德的構想，將球體分解為小小的方錐體（或金字塔）之總和，如此即可導出球體積公式。

在整數與質數（第 40-44 章）中，作者介紹了拉格蘭吉定理 (Lagrange's Theorem)：每個整數都是四個平方數的和、費馬最後定理、質數為不可細分（亦即除了 1 與自身之外，無其他因數）、哥德巴赫猜想，以及質數定理。作者從地毯製造商只打算出售長寬都是整數的地毯而引起的爭議，結果有人發現這一問題已經被法國數學家拉格蘭吉在 18 世紀解決。有了這一結果，作者再轉向費馬最後定理，不過，由於本書出版於 1992 年，所以，仍然聲明此一定理尚未被證明出來。至於有關質數的不可再分解，作者則從運動攝影記者的偏好橄欖球隊攝影切入說明，因為它有 15 名隊員，可以排成各 5 人的三排。相反地，足球隊（有 11 位隊員）則大概只有前排 4 人後排 7 人。還有，第 43 章的哥德巴赫猜想的介紹，應該是出自它的老嫗能解。最後，在質數定理這一章中，論及質數分佈之意義。

在機會這一部份（第 45-47 章）中，作者安排了中樂透獎的機會、俄羅斯輪盤賭與達倫伯馬領韁 (d'Alembert's Martingale)，以及巴斯卡三角形。

最後一部分「今日與明日……」（第 48-49 章）則介紹二元運算系統以及趨向無限兩個單元。前者之目的，顯然指向今日電算機的二進位制計算，並說明萊布尼姿的貢獻，後者呼應第 32 章的無窮等比收斂級數：

說明無限概念價值與意義，儘管我們今日處理時，仍然必須小心翼翼。

### 三、評論

本書特點之一，乃是一般的數學圖示卡通畫。一般非幼童閱讀的數學普及書籍之常見插圖，通常將數學圖示與卡通漫畫分開處理，前者之風格要求精確，後者則盡可能俏皮可愛。不過，同時期待作者與插畫者呈現這些公式的洞察力——這也是本書副標題所強調的面向之一，顯然並不容易！我們認為本書大致達成導言中創作者的自我期許：

為了進一步解說數學的美，我們創造了一系列的卡通插畫，以便引發發現的喜悅，並且象徵了數學公式的深刻意涵。我們已經盡可能讓文本與插畫同時有趣而不致損及數學的真，因為我們堅信數學活動涉及了遊戲的意義。(To further illustrate the beauty of mathematics, we have created a series of drawings that evoke the joy of discovery and symbolize the profound significance of mathematical formulas. We have tried to make the text and drawing amusing without doing injustice to mathematical truths, since we firmly believe that mathematical activity involves a sense of play.)

另一方面，本書不會因為卡通插畫之包裝已經假設了童書的層次，而迴避深

刻的數學定理或公式。顯然，它的呈現手法重在啓發勝過理解。這種「勇敢的」(courageous) 策略，對於那些動輒童言童語，而內容空洞的普及書籍來說，實在是非常強烈的對比。無怪乎本書自從 1992 年問世以來，本地讀者及出版商似乎極少聞問！

不過，本書作者對於單元之選擇似乎無從說出一個所以然來，儘管他們在前後呼應方面，一直頗下功夫。這當然是本書的不足，值得我們特別注意。

## 優秀數學科普作品的指標

指標以五顆星 ☆☆☆☆☆ 為最高品質。

### 1. 知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)

- (1) 認識論面向 (Epistemological aspect) : ☆☆☆
- (2) 歷史或演化面向 (Historical or evolutionary aspect) : ☆☆
- (3) 哲學面向 (Philosophical aspect) : ☆
- (4) 教育改革面向 (Education reform aspect) : ☆

### 2. 形式或表達 (Form or representation)

- (1) 創新手法 (Innovative approach: new story on old stuffs) : ☆☆☆
- (2) 數學知識的洞察力 (Insight into mathematical knowledge: inspiring and revealing) : ☆☆☆
- (3) 忠實可靠的參考文獻 (Integrity with references) : ☆☆☆
- (4) 敘事的趣味性、可及性與一貫性 (Narrative in an interesting, accessible and coherent way) : ☆☆☆

### 3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form) : 針對下列三個年齡層閱讀大眾，考量 (知識活動) 內容與形式 (包裝) 的不同平衡點。

- (1) 兒童層次 (for kids) : ☆☆☆
- (2) 青少年層次 (for adolescence) : ☆☆☆
- (3) 一般社會大眾 (for general public) : ☆☆☆

### 4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage) :

頁 39、97 之插圖！