

# 微積分如何學習？

洪萬生

台灣師範大學數學系

書名：《漫畫微積分入門》(Manga・Bisekibun Nyuumon)

作者：岡部恆治

繪圖者：藤岡文世

譯者：蔡青雯

出版：臉譜出版社

出版年份：2008

出版資料：平裝本共 286 頁，定價 280 元

國際書碼：ISBN 978-986-6739-66-8



## 一、前言

這是岡部恆治科普作品翻譯成中文版的第六本。本書簡介他是一位純數學家，但「卻擅長以平易近人、生動幽默的方式，解釋眾多學生畏懼的數學。」誠然，「他的想法豐富多變，不受拘束」，因此「得以廣受好評」。

對許多人來說，「微積分＝危機分」，它艱澀難懂，索然無味，在任何場合完全沒有用武之地。然而，經過本書的內容鋪陳，一定可以體會原來日常生活中處處可見微積分的概念，譬如「捲筒衛生紙的長度和微分、積分有關，白蘿蔔切片可以用來思考體積的計算，而裙子的長度及開高叉的設計，竟也運用了微積分的

觀念。」

## 二、內容簡介

本書共有十章，再加上「人物小傳」與「名詞解釋」兩個附錄。除附錄外，這十章都漫畫形式呈現－人物角色包括老師，學生有建中、小秋、阿郎、小凡以及鮮少露臉的跣歌與神秘作者。現在看這十章之目次：

- 第一章 如何計算捲筒衛生紙的長度？
- 第二章 白蘿蔔切薄片，思考體積
- 第三章 為什麼微分比較晚出現？
- 第四章 細分計算面積
- 第五章 牛頓與萊布尼茲之爭
- 第六章 如何才能事半功倍？
- 第七章 柔軟的洋蔥該怎麼計算體積？
- 第八章 從開高又到化石的年代測定
- 第九章 廁所是思考和空想的地方
- 第十章 設法近似  $\pi$

在每章中，作者還分節，並將各節標題置於各相關頁面的上方，但不影響漫畫故事的進行。還有，在各章結束時，作者還增列「解說」，針對各章之內容，進行提綱挈領的簡要說明，免得讀者被漫畫手法中的幽默打岔所分心。

現在，我們逐章簡要介紹內容。

第一章的副標題是「微分和積分的概念」，作者的主要例子是捲筒衛生紙的長度計算。至於其著眼重點，則是如何利用微分和積分的「概念」，以便進行「輕鬆計算」，因只是每層紙圈的半徑相差為這顯然是吸引學生的策略之一。「將捲筒衛生紙想成是一張紙環繞同一個圓心 0.05cm」，然後再利用「等差數列總和公式」，即可計算其長度了。另一方面，作者也提議我們考慮同心圓（按：應為（圓）環形 annulus）面積如下： $10^2\pi - 5^2\pi = 75\pi$ ，如令  $x$  為捲筒衛生紙之長度，則  $0.05 \times x = 75\pi$  可得  $x = 1500\pi$  (cm)。緊接著，作者說明何以這樣利用面積算出長度的方法是積分概念的一種進路 (approach) — 亦即，「將圓形分解為同心圓的圓周，然後再拉開計算」。還有，計算扇形面積時，「用積分來思考就非常簡單。如果把（半徑  $r$ ）無芯衛生紙捲切開（圓周長  $l$ ），擺在平坦的地面上，會變成什麼呢？」「啊！變成高  $r$  底邊長  $l$  的三角形！」

在第二章中，作者想要「談談微分和積分的定義」，不過，他也提醒我們「別過份拘泥於定義，本章的用意是更清楚說明第一章『微分和積分是計算切線斜率及面積』的觀念，只需要約略瞭解就可以了。」因此，作者的解說策略，是強調微分和積分是最能有效分析取自科學、運動、經濟等領域的圖表，並指出微分與積分各自扮演的角色：「微分是在圖表上畫切線的作業」，「積分是計算被曲線包圍部份的面積」，因為這種說法比起微分和積分是互逆運算，更輕鬆易解！

第三章的主題「為什麼微分比較晚出現？」，是一般微積分教師可能比較不

會注意到的問題。不過，誠如作者所認為：「如果能夠瞭解微分是怎麼發現的，就可以更深入理解微分的意義，以及微分為什麼比積分晚出現，並且體認數學與社會動向絕對有著密不可分的關係。」於是，在本章中，作者介紹了微分的前史，並說明費馬和笛卡兒發明解析幾何的歷史和認知意義。

第四章討論「積分概念的發展」。其中，作者結合了阿基米德的求積術、卡瓦列里原理 (Cavalieri's Principle) 以及沃利斯 (Wallis) 的圓周率乘積公式，而提供了極為有趣的數學知識，特別是有關阿基米德的球體積公式之推演。

第五章介紹「牛頓與萊布尼茲之爭」。儘管這一爭議具有數學史的意義，然而，他們兩人各自獨立發現了微積分基本定理 (本書稱為「微分積分學的基本定律」)，因此，都允稱為微積分的發明者。作者在本章中，也相當明確地指出：這個定理的「偉大之處在於連結計算簡單的微分，以及概念簡單的積分。連結迥異性質的事物能夠促進理論快速進展的道理，曾在第三章的『幾何學和代數學的統合』中做了說明，微分和積分也是同樣的道理。」此外，本章也論及無限小概念的爭議，但是，由於作者強調理論判定基準在於它的有效性，因此微分積分學乃能獲得長足的進展。

第六章主題是利用實例來計算微分和積分，強調極大、極小值的實用價值與意義。

從整本書的結構設計而言，第七章是最關鍵的一個環節。請先看本章開頭作者的夫子自道：

第一章已經討論過三角形和扇形。本章將更進一步探討，希望藉此重新思考微分和積分的概念，歸納連結瑣碎零散的觀念。此外，微積分理論的調理說明，其實只需要國中數學最大難關「圖形的計畫」這項微分和積分的概念，以及卡瓦列里原理。

本章第一幅漫畫，老師開宗明義指出：「初級數學能用積分重新證明和整理喔！」建中緊接著：「對啊，我們在 23 頁已經重新整理三角形和扇形了啊。」小凡再接著說：「不僅如此，等差數列也是同類吧！」然後，又是老師的提醒：「圓錐和角錐等錐體，和三角形也是同類喔！」於是，老師就從小學課程的三角形面積談起，再利用積分來思考公式之間的關聯。在「以卡瓦列里原理計算錐體體積」一節中，作者提及日本小學六年級教材中，有關將水倒滿三個全等圓錐體容器，再將圓錐體倒進同底等高圓柱體，藉以證明圓錐體積等於同底等高圓柱體積的三分之一。針對這一點，老師評論說：「只是看圖解說，其實不是壞事，不過國中時也提到必須『小心求證』，對不對？」再將卡瓦列里原理應用在一個立方體切成三個方錐體，以完成論證。最後，老師下結論說：「數學經常運用這種手法：特殊解法→一般解法。」

本章接著下來，是利用洋蔥來類比半球，以求後者的表面積。作者先喚醒讀者的記憶，「在半球體表面圈上繩子，再拆下來之後，擺在平面上變成兩倍，形成漩渦狀……」，不過，實在太難操作了，所以，他只好模仿捲筒衛生紙的面積計算，依此類推—「圓形是同心圓，球體就是同心球囉」。現在，運用洋蔥來比

喻，那麼，從球心切出一個「圓錐體」，其底部為球蓋形。假設  $S$  是半球體的表面積，由於洋蔥非常柔軟，半個洋蔥會「等體積地變換」成爲一個底面積爲  $S$ 、高爲  $r$ （球半徑）的圓錐體，亦即  $\frac{Sr}{3} = \frac{2}{3}\pi r^3$ ，所以， $S = 2\pi r^2$ 。「依據卡瓦列里原理的概念，就能佐證國中的圖形公式。積分概念真是簡單又有用啊。即使不必實驗，也能成功解題呢。」

第八章的副標題是「微分和積分竟然可以這樣用」，其中作者依序以「開車和微分」、「導航是積分」、「在設計方面的應用」、「無法微分的點」、「不連續性的意義」、「不連續性的利用」、「化石年代測定的運用」以及「人造衛星的速度計算」爲單元，分別介紹微積分比較容易被忽略的應用。

第九章的副標題爲「重新檢視高中數學」，因此，這也是連結微積分與初等數學的一個「教學」示範。作者從小學階段學過的圓面積公式談起，並指出微積分課本通常所提供的圓面積公式證法，「剛好是非常典型的循環論法」：

半徑 1 的圓面積  $= \pi \Rightarrow$  圓心角  $x$  的扇形面積爲  $x/2$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \Rightarrow 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \text{半徑 1 的圓面積} = \pi。$$

因此，作者建議使用他最得意的捲筒衛生紙理論，亦即若半徑爲  $x$  的圓面積爲  $S(x)$ ，則考慮  $\int S'(x)dx$ ，即可證得圓面積公式。本章其他四節內容如曲線凹凸、二次函數分析、三次曲線形狀，乃至於牛頓近似公式，當然都涉及二階導數，在一般微積分教科書中都是必須交代的單元，此處不贅。

本書最後一章，亦即第十章主題爲「設法近似  $\pi$ 」，目的當然以比較複雜的函數如三角函數、對數函數和指數函數爲例，來試試微積分這種工具的銳利。由於換元積分（或連鎖法則）之應用並非萬靈丹，因此，在本書最後一個單元中，作者介紹辛普森公式來計算定積分的近似值。

### 三、評論

誠如我推薦本書時所說：「本書維持了作者一貫的敘事風格—深刻、幽默但平易近人。他的數學素養博雅，也為成功的科普書寫，作了最佳見證。」

就近取譬誠然是岡部恆治的主要風格，譬如日常生活中處處可見的捲筒衛生紙、白蘿蔔切片、柔軟的洋蔥以及開高叉的裙子等，這當然也得力於他博雅的素養，以及數學普及的使命與用心。其中，有關柔軟的洋蔥之類比，真是令人驚豔的高招，尤其是連結到國中階段的面積和體積公式，更是充滿了教學的關懷與啓示。

還有，第四章有關數學知識的起源或發生 (genesis) 問題，也是一般教師比較容易忽略的面向，作者運用相當自然的對話點出來，是非常有創意的安排，非常值得吾輩效法。凡是涉及知識如何或為何發生的問題，總是不可避免地回歸到

數學史，這當然也充分地解釋了岡部恆治對於數學史的關懷與興趣。

不過，作者也有力不從心之處，譬如有關微分與積分的關係 (pp. 38-39)，顯然就無從解說清楚。此外，求兩圓柱交叉部分的體積之問題非常古典卻很有趣，作者只利用積分算出其結果，而未說明這是阿基米德的古典問題，也是中國數學家劉徽、祖沖之父子據以推演球體積公式的概念工具，<sup>1</sup>實在有一點可惜！

儘管如此，岡部恆治所強調的從高觀點（微積分）看初等數學（高中、國中數學），在本書中卻以相當淺顯的例證，充分表露無遺。誠然，在這樣的科普讀物中，他仍然念念不忘數學知識的結構性意義，實在不能不說是他的普及書寫之一大特色。

## 優秀數學科普作品的指標

指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

### 1. 知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)

- (1) 認識論面向 (Epistemological aspect) : ☆☆☆☆
- (2) 歷史或演化面向 (Historical or evolutionary aspect) : ☆☆☆☆
- (3) 哲學面向 (Philosophical aspect) : 不適用
- (4) 教育改革面向 (Education reform aspect) : ☆☆☆

### 2. 形式或表達 (Form or representation)

- (1) 創新手法 (Innovative approach: new story on old stuffs) : ☆☆☆☆
- (2) 數學知識的洞察力 (Insight into mathematical knowledge: inspiring and revealing) : ☆☆☆☆
- (3) 忠實可靠的參考文獻 (Integrity with references) : ☆☆☆
- (4) 敘事的趣味性、可及性與一貫性 (Narrative in an interesting, accessible and coherent way) : ☆☆☆☆

### 3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form) : 針對下列三個年齡層閱讀大眾，考量（知識活動）內容與形式（包裝）的不同平衡點。

- (1) 兒童層次 (for kids) : ☆☆
- (2) 青少年層次 (for adolescence) : ☆☆☆☆
- (3) 一般社會大眾 (for general public) : ☆☆☆☆

### 4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage) :

解決大量數字的方法，就是「等差數列總和公式」。利用這種方法，可以輕鬆計算出定量遞增的數字的總和。

然後，若能更進一步利用積分的概念，即使是小學生都能解決這個問題。

如此一來，我們能瞭解數學隨著進化，使計算變得更輕鬆簡單。事實上，數學是一門讓事物更簡單易解的學問。從書中各項說明可以知道，微分和積分並非

---

<sup>1</sup> 參考洪萬生，〈劉徽墓碑怎麼刻？〉，收入洪萬生等著，《當數學遇見文化》（台北：三民書局，2009），頁 54-71。

只是計算的學問，而是減少計算的學問。

此外，根據微分和積分，還能找出扇形和三角形等的關聯性；甚至發現數列總和公式和三角形面積公式的相似性。不僅如此，在後面的章節中，許多圖形的量還能透過微分和積分來找出共同點。(pp. 42-43)

在評斷證明題是否正確時，不考慮學生是不是真正理解，只考慮是否符合形式，挑剔細微末節，然後扣分；這種評分方式，即使是數學家也會討厭證明。

對於證明題的部分，吹毛求疵；對公式證明卻敷衍帶過，例如只以「將圓錐容器中的水倒入圓柱容器中，水位達  $\frac{1}{3}$ ，所以圓錐體積是……」，這樣的教法讓人無法信服接受。正確的作法應該是思考如何讓圓錐和球體的體積、球面的表面積等更合理、更符合理論。(p. 192)