

評論《給青年數學家的信》

師大數學系研究生 黃俊瑋

書名：給青年數學家的信 (Letters to a young mathematician)

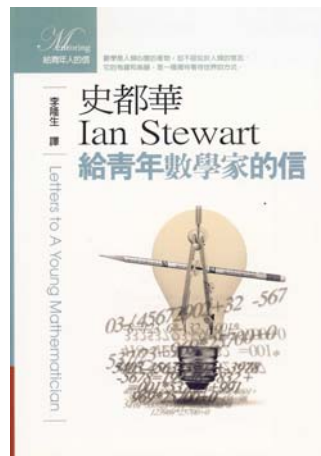
作者：史都華 (Ian Stewart)

譯者：李隆生

出版社：聯經出版公司

出版年份：2008 年

國際書碼：978-957-08-3230-3



一、內容簡介

本書作者是英國皇家學會院士，同時也身兼數學家與數學科普作者的史都華 (Ian Stewart)。至於其內容，則企圖回應英國大數學家哈代 (Godfrey Harold Hardy) 的《一個數學家的辯護》所提出之議題，作為未來數學家生涯規劃之參考借鏡。本書透過寫給「梅格」(Meg) 的信件，以時間為軸，從梅格高中抉擇是否進入數學系，直到在大學取得永久教職為止，對青年數學家的生涯，給予了重要而實在的建議。書中廣泛地提到了數學的重要性，什麼是數學？數學的應用是什麼？如何學習數學？如何教數學？乃至如何獨自地研究數學或與他人合作等等，在成為職業數學家的過程中，所必需面對與思考的諸多重要課題。

如上所述，本書的主要內容以二十一封信件所組成。首先，我們將各封信之標題列舉如下：

- 第一封信 為何學數學
- 第二封信 我幾乎成了律師
- 第三封信 數學的廣度
- 第四封信 不都已經做完了嗎？

- 第五封信 被數學包圍
- 第六封信 數學家如何思考
- 第七封信 如何學習數學
- 第八封信 恐懼證明
- 第九封信 電腦是否可以解決一切
- 第十封信 陳述數學故事
- 第十一封信 全力以赴以贏得勝利
- 第十二封信 大工程
- 第十三封信 無解的問題
- 第十四封信 職業生涯
- 第十五封信 純數或應數?
- 第十六封信 瘋狂想法怎麼出現
- 第十七封信 如何教數學
- 第十八封信 數學這個圈子
- 第十九封信 豬和卡車
- 第二十封信 合作的樂趣和風險
- 第二十一封信 上帝是數學家嗎?

在第一封信〈為何學數學?〉與第三封信〈數學的廣度〉中，作者開門見山地便向社會大眾與青年學生們宣告，數學是重要的，數學是有用的，數學的基礎可幫助你進入許多職業，取得高額薪資。更重要的，只要我們留心，日常生活中可謂處處皆隱藏了數學的蹤跡，今日的文明與科技的運作，無法脫離數學的支持，如同作者所說：「其實生活的全部就如同一艘在數學海洋裡徜徉的小船，上下擺動。」

「沒有數學，我們的世界裡將有很多事物不可能存在。」又說道：「數學對人類生存的深遠影響僅存在幕後，因此不受人注意。」而數學除了是智力的遊戲之外，更「提供了一個非常有用的方式去欣賞自然的美」，因此，數學其內在的美麗也不應該被輕忽。

作者也認為，我們的高中數學學習，「主要是一些基本的技巧，以及如何應用在非常簡單的情況」，然而，「所有人類行為的最高層次都要求確實掌握基礎事物，而數學正巧要求許多的基本知識和技巧。」也唯有在進入大學數學系之後，才會碰到更深廣的數學概念，也唯有親自進入數學研究領域，才能慢慢了解到，數學到底是什麼。同時，他還向讀者們推介了 R. Courant 與 H. Robbins 所著的《什麼是數學?》(What Is Mathematics?) 一書。並提到了柏拉圖學派 (Platonism) 以及以 D. Hilbert 為首的形式主義 (formalism) 哲學觀點。最後，也確定地告訴大家：「數學家是那些看到有做數學機會的人。」

第四封信裡，作者首先糾正了一般人或是學校老師誤以為學校數學就是數學的全部的想法，批判了現今學校的數學教育中，總是把答案放在書的最後幾頁，問題的答案也總是只有對或錯等現況。同時，他也指出：沒有人告訴學生們，教

科書之外仍有其它數學存的真相，以致學生缺乏想像力，並以爲教科書包含所有可能的數學了。數學的浩瀚，反而使得數學本身像倒立的金字塔，越高，就越有更高的空間去建更寬廣的層樓。作者也用「學習越多的數學，將發現更多的機會去問新問題，當我們數學知識增加，新發現的機會也跟著增加」，以及「當我們向前逼近數學的邊界，邊界就變得更加寬闊」，清楚地回答了此封信標題所提出的問題：「不都已經作完了嗎？」

第五封信〈被數學圍繞〉，正是梅格即將就讀大學學習的時刻，作者告訴梅格：「許多數學家從自然得到靈感。」「數學是關於模式和為何產生這樣的模式，自然的模式美麗無窮盡。」也因此，就如同我們所了解，過往數學的發展過程裡，大自然，正是數學家最豐富的寶藏，是靈感的泉源。反過來，數學也用以幫助我們理解更複雜的現實世界。

第六封信，談論到數學家如何思考？首先，提到 J. Hadamard 在《數學領域的發明心理學》(*The Psychology of Invention in the Mathematical Fields*) 的觀點：(1) 大部份的數學思考從模糊的視覺影像開始，然後才用符號使之形式化。(2) 數學的想法歷經如下三大階段：首先，對問題下很大工夫、停止思考問題，轉而做其它事，然後，「恍然大悟」、最後，則是正式寫下所有事情、檢查細節、組織與發展。這呼應了龐加萊 (Henri Poincare) 認爲的：「準備」、「啓發後的孕育」、「驗證」的三個階段。還有，作者也提到了現今多數數學家所使用，較上述三階段更爲複雜的過程網路。

第七封信，教導梅格「如何學習數學」：「在學習時，一旦遇到不懂或是學不會之處時，應該繼續讀下去，通常下一句話或是下一段話就會解決你的問題，倘若勇敢讀下去，卻仍無法理解，就應該求助於助教或老師。同時，往往對某些問題無法理解的原因，是由於未能先適當了解其它的某些數學。」再者，作者也建議：「閱讀和主題相關的書籍。」不只是閱讀指定的內容，而找出同樣主題或相似主題的書，集中學習有興趣的事物。最後，諸如 G. Polya 的《如何解題》(*How to Solve It*) 提供了許多技巧，可提升解決問題的能力。而大學生亦必須具有自我負責的態度。

第八封信、第九封信與第十封信，則是提到證明的意義與重要性。中學與大學數學的最大差異在於證明，中學往往學習的是「如何」的知識，而大學則轉而學習「為何行得通，並要證明它們行得通。」「數學家們專注於證明，同時也是證明的愛好者。」「證明提供了某個對的想法堅實的保證，無論多少實驗證據都無法取代證明。」信中除說明了證明与其它形式證據的不同之處，並回答了關於證明的兩大議題：證明是什麼？為何我們需要證明？至於第九封信，則簡短地從探討電腦是否可以解決一切問題，以及透過電腦進行數值計算與檢查的意義中，引出數學證明的必要性以及無可取代性。

第十封信〈陳述數學故事〉，主要探討「什麼是證明？」作者首先提到歐幾里得所著之《幾何原本》(*The Elements*)，由兩種基本假設—「設準」(postulate) 與

「共有概念」(common notion) 出發，¹透過邏輯貫穿整個希臘幾何學。教科書將證明植基於歐氏模型，同時，一個證明為從基本假設或之前已經證得的結果開始，再經邏輯演繹的有限步驟，最後的結論稱為定理。而作者也認為：「證明是一個故事。」是「由一個數學家告訴另一個數學家的故事，以他們之間共同語言來表達。」

往後三封信，則是針對梅格成為研究生之後，選擇研究問題的種種建議。第十一封信〈全力以赴贏得勝利〉告訴梅格明智的研究方式，是花部份時間在大問題上，其餘時間則花在較小的、可解的，但仍值得做的問題。同時，信中提及了懷爾斯 (Andrew Wiles) 完成了費馬最後定理的證明，攀上了數學的高峰的故事，而第十二封信〈大工程〉則提到諸如有限單群分類、克普勒猜想、四色定理等許多艱難的數學問題，以及電腦在這些問題上的幫助。而第十三封信〈無解的問題〉中，主要討論了三等分任意角的問題，也告訴梅格，別去觸碰那些已經被證明為不可能的問題，就如同面對那些嘗試建構出三等分任意角的方法，即使無法找出錯誤何在，但我們可以確定錯誤一定存在。

再接下來的三封信，是有關研究生所需面對的問題。第十四封信〈職業生涯〉，提到人際關係的重要性，除了與同學組成支持團體之外，就是指導教授的協助。最後，也提到女性目前在研究上與男性之間所取得的平等開放地位。第十五封信〈純數或應數?〉則是關於挑選研究領域的問題，該選擇純數或應數？作者告訴梅格：「應該兩者都做，區分純數和應數毫無幫助，並很快地變得不是那麼有道理。」同時，作者也在信中批判了近代純數與應數的分野，過渡區分，不僅沒有意義，且畫地自限。數學從自然 (實際問題) 尋找靈感，反過頭來，並有效地解釋並服務了自然 (實際問題)，兩者之間雙向交流，並行不悖。至於應該研讀純數或應數？作者清楚地告訴梅格：「兩者皆非。應該使用手邊的工具，適應並改造它們以配合妳自己的研究計畫，有需要時則製造出新的工具來。」第十六封信〈瘋狂的想法怎麼出現?〉中告訴梅格，具備創新的心靈並全心投入，有天分的人也需要經過嚴格的訓練，才能停留在所選領域的頂端，一旦有不錯水準的能力之後，精力和動機就比天賦重要。

教數學往往是一個數學家必經且無法避免的課題，第十七封信中，作者告訴梅格如何教數學。「教學可以讓數學家將自己對數學的了解傳授給下一代，也可使自己的心智暫時離開研究，而思索新的問題。」並且認為：「優秀的老師必需將自己放學生的立場考量，並將教材簡單化和愚笨化，只談論主要論點，不要離題。而數學必需將新的概念建立在舊的概念上，但最終，新的概念必須和舊的概念脫勾，學生必需將新的概念內化。」

緊接著第十八封信，提到了進入數學圈之後，所必需面對或加入的種種社群，數學不僅是先前所談的專業層面，還包括將共同工作的人以及如何融入社

¹ 本書英文原版稱為“axiom”，參考 Ian Stewart, *Letters to a Young Mathematician* (New York: Basic Books, 2006), p. 87。這顯然一個筆誤。正確的英文字應該是 postulate，中文譯為「設準」(假設成為準則之意思)。

群。這中間包括了數學家之間的交流、數學家的拜訪、數學家們的聚會、以及各類研討會等。

名為〈豬與卡車〉的第十九封信，是梅格升任助理教授時，這時，除了擔負更多的責任外，必要的工作便是找出學校的要求和期望，並滿足這些要求與期望。同時，也在信中殷切地提醒梅格許多應當注意的事情，以及學習如何避免犯錯。

而有關職業生涯高峰期的第二十封信，談論到數學家與他人合作進行研究已是現今的趨勢，尤其複雜的研究計畫或跨領域的主題，需要各式人才的參與，同時集思廣益也往往讓人產生新想法。然而，合作亦有無法避免的問題或負面效應存在，保持放鬆與容忍並具有廣泛興趣則能帶來幫助。

最終的第二十一封信〈上帝是數學家嗎？〉裡，作者回歸到數學哲學問題的探討：數學一直被視為自然定律的基礎，但「什麼是自然定律呢？是關於世界的深層真相？或是人類以有限的智力去簡化大自然不可言喻的複雜呢？上帝真的是幾何學家嗎？數學模式真的呈現在自然界裡嗎？或這只是我們的發明呢？如果是真的，這些模式僅僅只是我們所專注的人為自然層面？同時，作者也提出「對稱為自然界的數學模式裡最簡單和最精確的來源之一。」的想法，而「我們身邊到處可見的對稱性，則是人們大腦經驗這世界，深奧而簡潔並具普遍性的較佳幻想」。最後，作者以：「上帝無疑是數學家，比世界上的任何數學家都棒得多。」肯定地回答了問題，且為本信作了完結。

二、評論

數學，是許多中學生乃至大學生們避之唯恐不及的科目，也甚少有小孩子會從小立志成為數學家，而數學家的工作，也總是被視為遠離人群、遠離社會、遠離世界。然而，本書作者就勉勵了書中的主人翁「梅格」，從其堅定志向、選擇數學系開始、進一步地研究數學問題、一路至數學成為終身職業的這條路上，所應認識、所該注意的重要觀念。他也提到了許多數學圈子裡，諸多不為社會大眾們所了解的事，或是一般人對研究數學這條路的誤解。作者的目的，顯然是一步一步引領一個青年人，從攻讀數學開始，最終成為一個成功的數學家。

在內容上與形式上，本書主要透過信件的形式，以第一人稱單方面對話、述事的方式寫成，向梅格提出了許多一般人對於「數學」這個世界，容易產生的好奇與疑問，然後，再透過本身的實際經驗進行回答、分享並提供相關的看法。短短的 21 封信中，充滿了作者對於數學的許多深刻見解與想法。至於本書的內容上，並不涉及太多專業的數學理論與知識，大多僅是點到為止地提及與介紹，對於青年學生或一般社會大眾而言，即使略過部份稍加專業的術語，也不至於影響整體閱讀的理解與連貫性。反而是書中許多發人深省的話語，相當值得無論是否準備攻讀數學的學生，或者一般社會大眾們細細咀嚼、品嚐再三，雖名為「給青年數學家的信」，但仍值得非數學系學生、一般社會大眾或者中學數學老師們一讀。

在鼓勵青年學生們學習數學或進一步以數學為主修科目之前，當然必需讓學

生們了解這門學科有何重要性、有何應用與實用性，以及這學科本身在未來發展的廣度與深度。作者在最初的信件中，花了不少篇幅、也用了巧妙的比喻來回答了這個問題：具有數學學位的人平均所得相當高。同時數學總是居於幕後，即使一般人看不見、感受不到，但它總是存在於事物的背後，並且不可或缺。又倘若我們追根究底地「在所有使用到數學的東西上貼著『內含數學』的紅色標籤，那麼，最終大部份的地球將被紅色標籤所覆蓋。」而大自然，是數學家靈感的來源，從中找尋數學的模式，數學也使我們看清了諸多的現象，「即使像計算如此簡單的問題，我們數學家和其它人看世界的眼光也不一樣」，也隱約地呼應了古希臘哲學家們的觀點，他們認為學習數學可以幫我們穿透表相，最終才能看清紛雜事物背後的真相，從中也更加突顯出數學學習的重要性與必要性。如此，作者也可說是為一般中學數學教師們，提供了深刻而良好的回答，可消除了數學學習者們心中長期而普遍存在的疑慮。

而作者也在諸如：〈我幾乎成了律師〉、〈不都已經做完了嗎？〉、〈數學家如何思考〉、〈如何學習數學？〉、〈如何教數學〉等信件中，提出對中學數學教育與一般數學學習的諸多想法。他認為在現今數學教育之中，答案通常非對即錯，或提供固定答案於書末的方式，大大地限制了學生們的想像力與創造力。他也認為重要的是我們發現答案的過程和努力，重要的不是答案本身，而是知道如何得到答案。這回應了近代數學教育改革的主要潮流，從過去以快速求得正確答案與結果為數學學習的主要目的，轉變為注重過程 (process)，並強調數學知識的對學習者的意義 (meaning)。

又如同作者認為「優秀的老師必需將自己放在學生的立場考量，並將教材簡單化和愚笨化，只談論主要論點，不要離題。而數學必需將新的概念建立在舊的概念上，但最終，新的概念必須和舊的概念脫勾，學生必需將新的概念內化。」這也是現今數學教育研究中重要的議題，教師並非單方面的傳授數學知識，而必需站在學生的角度思考，了解所教授的教材內容之外，更應了解學生的先備知識，藉此以舊知識基模為基礎，進一步同化新的學習經驗，從中建立有意義的新知識，同時擴大原有的知識基模。

另外，作者也企圖在信中，導正一般社會大眾們，誤以為中學教科書數學就是數學的全部，或是認為學習中學數學就夠用了的觀念，以及數學僅僅局限於在學校所教的東西，所以中學畢業後「都已學完了」的想法。數學教師應該告訴學生們，數學與生活之間的關聯，也得告訴學生們，教科書外仍有其它的數學。他認為「中學數學充其量只是基本的『算術』，只是未來學習的基本工具。」作者亦如此比喻：「希望學校能使用之前曾使用的『算術』來取代數學，但將算術稱為數學貶低了數學的身價，就如同使用『作曲』一詞去描述例行的練習彈奏音階。」只學習了中學數學，就如同「榔頭和鋸子很有用，但若不知道如何使用，就無法造出椅子。」因此，他鼓勵青年學生多認識接觸各種教科書外的數學，或是親自體驗數學系的學習內容，如此將會發現數學的天空如此寬廣。

至於數學的寬廣，則是「如同倒金字塔式地往上層層加蓋，建築物越高，便

有更多的空間去建更廣寬的樓層。」「學習越多的數學，將發現更多的機會去問新問題，當我們數學知識增加，新發現的機會也跟著增加。」以及「當我們向前逼近數學的邊界，邊界就變得更加寬闊。」因此，作者也明白地告訴選擇以研究數學的為工作的人，不必擔心問題竭盡的一天，數學的未來依舊無限寬廣。然大多數中學數學教師們，對於數學的意義與應用，對於數學的發展、數學的研究、數學家的活動，以及對於數學學科本身的了解，皆相當有限，因此，就這點而言，本書亦值得一般中學數學教師們細讀，以更加了解數學學科本身，方能以宏觀而多元的角度，來看待自己所教的學科。否則，一旦教師自己不了解學科本身，又如何能教好該學科呢？

本書也提到：「雖然大部份數學家工作是獨自甚至孤獨中完成的，但你研究的最重要層面，卻不是你選擇的領域或你研究的問題，而是妳如何處理周遭的人際關係。」這回應了時報文化出版的《費馬最後定理》其中的〈好朋友〉一章，懷爾斯藉數學家好友泰勒的力量，在最重要的時刻，成功地攻堅了費馬最後定理的故事。數學研究的成敗，除仰賴了自身的天份與不斷地努力之外，往往需要身邊的數學社群，或是擁有能力相仿而志同道合的好友，在關鍵時刻給予臨門一腳的協助。數學的研究過程常是孤獨的，卻也不孤單。而擁有同等天份的數學家，往往是具備良好的人格特質與人際關係者，方能得到最終的勝利。

第十四封信的〈職業生涯〉中，除了介紹數學研究生涯的六大主要階段，指導教授在研究生涯初期的重要性與意義，並提到關於女性在數學學習與數學研究上的相關議題。從作者特別選擇女性，作為本書主人翁「梅格」的性別角色時，我們也可窺探其意圖，推崇現今女性在數學研究上所占的地位，並鼓勵鼓勵更多的女性從事數學相關職業。此外，他也在本封信中舉出了相關數據，佐證了女性在數學系與數學博士所占的比例的確與日俱增。也提出「女性不適合學習數學的想法，早已過時」、「數學生涯的階梯已經對男女平等開放」等看法，挑戰著過去社會大眾的傳統錯誤觀念。而現在與未來的數學研究成果與研究社群，亦不再是男性獨斷的專利。

再者，「數學哲學」也是作者在文中廣泛討論的一大議題。首先，在第三封信〈數學的廣度〉裡，提到「數學如同科學一般依賴嚴苛的測試，只是科學使用的是實驗來驗證，而數學使用證明。」而實驗與證明的主要差異，則在第八、第九封與第十封信中，進一步地比較與說明。第八封信討論了「為何我們需要證明？」亦即數學證明在方法論上的意義與重要性，作者以「不論多少非主要的證據支持某個數學陳述，真正的數學家絕對不會感到滿意，除非這個陳述獲得證明」，以及「證明提供了某個對的想法堅實的保證，不論多少的實驗證據都無法取代證明」回答了這個問題。

第九封信，標題提出了「電腦是否可以解決一切？」的問題，再從文中清楚地告訴讀者們，電腦實驗數據無法取代數學演繹證明，再先進、再快速的電腦也永遠無法取代數學家的角色與地位。而第十三封信中，也警告梅格，別浪費時間去挑戰數學家早已證明不成立的問題，否則一切的努力終將徒勞無功，這也在在

說明了數學世界的確定性，數學證明的堅實性。數學證明與一般社會學科方法、科學實驗方法之間的差異。至於第十封信，則是回到另一個問題：「證明是什麼？」作者透過歐幾里得之《幾何原本》的嚴密邏輯演繹架構，作為何謂數學證明主要說明。

再回到第三封信，作者提出了數學哲學兩個主要學派：柏拉圖主義 (Platonism) 與形式主義學派 (formalism)，討論了數學知識本質的問題。柏拉圖主義認為數學知識客觀獨立地存在某個理想的世界中，人類心靈可以掌握理解它，我們是發現定理而非發明定理。至於形式主義的觀點，則是將數學視為抽象與符號的學科，不需涉及意義的問題。而書中，也提出哥德爾的研究成果，其證明不完備定理，亦即任何有意義的形式系統中，都包含了無法判定，獨立於系統的命題，此結果也重創了希爾伯特的形式主義。至於近代邏輯主義、直觀主義、集合論等數學基礎學派的主張，則不在作者的討論範圍中。

最後的第二十一封信〈上帝是數學家？〉探討了數學是否為自然定律。作者拋出一連串關於數學哲學的問題：「什麼是自然定律呢？是關於世界的深層真相？或是人類以有限的智力去簡化大自然不可言喻的複雜呢？上帝真的是幾何學家嗎？數學模式真的呈現在自然界裡嗎？或這只是我們的發明呢？如果是真的，這些模式僅僅只是我們所專注的人為自然層面？」

數千年來，這些問題曾經引動了諸多數學家與哲學家們思考與探討，也許如同作者所言，至今我們仍無法確實地回答。然而，打從過去，數學就被視為人類理解複雜世界背後的現象的理性方法，數學模式是宇宙運作的藍圖，是大自然的定律。「上帝依照數學原理設計這個宇宙」、「數學知識是上帝用於設計宇宙的真理」也曾經是宗教的信條，引發人們追尋真理的動力。雖然近代數學基礎工作所產生的難題，以及純數 vs. 應數的分野，一度使得數學與其在物理世界的應用分道揚鑣，然而，數學對於自然的應用，數學之精確與預測真實現象的能力，告訴我們，數學的模式仍是人們大腦、人類心靈經驗這世界的最佳方式，「只有數學的宇宙才能發展人類的腦袋去從事數學，也只有幾何學家上帝才能創造出一個具有能力的心智，可以想像出幾何學家上帝的存在。」基於此，作者最後也以「上帝無疑是數學家，比世界上的任何數學家都棒得多。」作為結論。

本書中譯本譯者在中文翻譯之後，保留了英文原文，以供讀者參考。然而，部份數學名詞的翻譯與國內現行並不一致，值得讀者注意，譬如第 107 頁，本書提到的《只愛數字的女人》一書，與該書在國內的中譯名《數字愛人》有所出入，同樣的，在第 76 頁提到，Eric Temple Bell 所著的《Men of Mathematics》一書，在國內中文譯名為《大數學家》與譯者所譯之《數學人》不同。第 160 頁之中，將「測度論」(measure theory) 一詞翻為「測量理論」，則是比較明顯的謬誤。同時，部份數學家的中文譯名，也與一般書中常見的中文翻譯有所不同。

綜合而論，作者史都華 (Ian Stewart) 身為英國皇家學會院士，並身兼數學家與數學科普作家，其高深而雄厚的數學內力，自然對於數學知識與數學歷史本身具有良好的洞察力與見解。他在本書主要的篇幅中，關注於數學學科本身，並

殷切地領引青年數學家「梅格」邁向成功數學家之路。此外，作者亦對於現今的中學數學教育層面、性別與數學、數學證明的方法論上、數學之於社會的義意與應用、數學哲學等面向，皆提出了探討與評析。而書中諸如：「生活的全部就如同一艘在數學海洋裡徜徉的小船，上下擺動。」、「數學對人類生存的深遠影響僅存在幕後，因此不受人注意。」、「數學除了是智力的遊戲之外，數學更提供了一個非常有用的方式去欣賞自然的美」、「數學家是那些看到有做數學機會的人。」、「證明是一個故事」、「數學證明是由一個數學家告訴另一個數學家的故事，以他們之間共同語言來表達。」、「對稱為自然界的數學模式裡最簡單和最精確的來源之一」等諸多的巧喻與妙語，更見作者的才華與洞識，也頗能提供引用與細細品味。

本書雖未必適合大多數的青少年學生，但仍能勉勵具備良好的數學天賦，或是將來有志選擇主修數學的青年學生們，並在數學學習上，給予必要的提醒與幫助。中數數學教師與社會大眾也能藉以更深刻而廣泛地認識數學這一學科與這一行，同時也可以體認到，研究數學這條路並非是不歸路，反而是充滿希望與意義的康莊大道。我想，這是作者想藉本書傳達的最重要訊息吧。

優秀數學科普作品的指標

評價方式：指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

一、評價方式

指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

1. 知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)

- (1) 認識論面向 (Epistemological aspect) : ☆☆☆
- (2) 方法論面向 (Methodological aspect) : ☆☆☆☆
- (3) 歷史或演化面向 (Historical or evolutionary aspect) : ☆☆
- (4) 哲學面向 (Philosophical aspect) : ☆☆☆☆
- (5) 教育改革面向 (Education reform aspect) : ☆☆☆☆
- (6) 與自然科學、人文社會乃至生活經驗的連結 (Connections with natural science, social sciences and humanities as well as daily experiences) : ☆☆☆☆

2. 形式或表達 (Form or representation)

- (1) 創新手法 (Innovative approach: new story on old stuffs) : ☆☆☆☆
- (2) 數學知識的洞察力 (或洞識) (Insight into mathematical knowledge: inspiring and revealing) : ☆☆☆☆
- (3) 歷史事實的洞察力 (或洞識) (Historical insight or a sense of history) : ☆☆☆☆
- (4) 異文化的啟蒙意義 (Enlightening in cultural mathematics) : ☆☆☆

- (5) 忠實可靠的參考文獻 (Integrity with references) : ☆☆
- (6) 敘事的趣味性、可及性與一貫性 (Narrative in an interesting, accessible and coherent way) : ☆☆☆☆
- (7) 中譯本的品質 (若需要) (Quality of Chinese translation version, if needed) : ☆☆☆

3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form)

- (1) 青少年層次 (for adolescence) : ☆☆☆
- (2) 一般社會大眾 (for general public) : ☆☆☆☆

4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage) :

我有時認為，要改變人們對於數學的態度，最好的方式是，在任何使用到數學的東西上貼著寫著「內含數學」的紅色標籤，……大部份的地球都將被紅色標籤所覆蓋。

其實妳生活的全部就如同一艘在數學海洋裡徜徉的小船，上下擺動。

〈為何學數學?〉

數學家是那些看到有做數學機會的人。

〈數學的廣度〉

當我們向前逼近數學的邊界，邊界就變得更加寬闊。〈不都已經做完了嗎?〉

數學家是證明的愛好者：不論多少非主要的證據支持某個數學陳述，真正的數學家絕對不會感到滿意，除非這個陳述獲得證明—要求絕對符合邏輯，一切都精確清楚，沒有模糊地帶。……證明提供了某個對的想法堅實的保證，不論多少的實驗證據都無法取代證明。

〈恐懼證明〉

證明是一個故事。數學證明是由一個數學家告訴另一個數學家的故事。

〈陳述數學故事〉

微分方程和時鐘都是工具，都不是答案，他們產生作用的方法是，藉著將原本的問題鑲嵌在更寬廣的脈絡，獲得一般的方法去理解脈絡。此一般性改進了它們在他處運用的機會，這正是為何它們的有效性顯得不可思議。〈純數或應數〉

對稱為自然界的數學模式裡最簡單和最精確的來源之一。

只有數學的宇宙才能發展人類的腦袋去從事數學，也只有幾何學家上帝才能創造出一個具有能力的心智，可以想像出幾何學家上帝的存在。

〈上帝是數學家嗎?〉