

## 評論《質數魔力》

台北縣福和國中 黃清揚

書名：質數魔力(Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved

Problem in Mathematics)

作者：德比夏爾 (John Derbyshire)

譯者：陳可崗

出版社：天下遠見

出版年份：2005 年 11 月 29 日

出版資料：平裝共 522 頁，定價上冊 250 元；下冊 260 元

國際書碼：ISBN 986-417-598-X(上冊)；ISBN 986-417-599-8(下冊)



### 一、內容簡介

大多數的人對於偉大德國數學家黎曼的生平可能不太瞭解，但修習過大學數學課程的人，則應該對黎曼並不陌生，因為這兩個字一定會在教科書中出現，例如黎曼積分、柯西-黎曼方程式及黎曼算子等等。本書就是有關黎曼、質數及黎曼假設的故事。

黎曼 (Bernhard Riemann)，鄉下牧師的次子，1826 年誕生於漢諾威王國的一個小鎮。童年時代的他就已顯露出對數學的不凡天賦。黎曼在 1846 年，當年他十九歲時進入哥廷根大學的，最初專攻神學和哲學，但是，不久就獲得家人的首肯改習他最熱愛的數學。在哥廷根大學待了一年之後，黎曼就前往柏林，接受狄利克雷的指導。他的數學研究因而有了長足的進步，也對他的一生有重大的影響。在柏林待了兩年之後，黎曼重回到哥廷根，並在高斯指導下，完成他的博士論文《單複變函數的一般理論的基礎》(1851)。1854 年，黎曼於成爲哥廷根大學的數學講師。1859 年，他更被哥廷根大學任命爲正教授，繼承了高斯及狄利克雷的遺缺。1866 年七月，黎曼年方四十歲，但因身體健康惡化，卒於義大利馬久雷湖畔。雖然一生短暫，所寫的論文不多，黎曼的每一篇論文卻都極其重要，其中數篇甚至開創了全然嶄新的數學領域，黎曼假設便是其中之一。

時間回到 1859 年，這一年黎曼由柏林科學院甄選為通訊研究員，時年 32 歲，黎曼並因此提出論文介紹自己正從事的研究工作，論文題目為〈論小於某已知數的質數個數〉。在論文的三分之一處，他提出了下列假設：

zeta 函數所有的非明顯零點，實數部分都是  $1/2$ 。

這便是本書的主角「黎曼假設」。黎曼當時因為他的研究工作對這項證明並沒有立即的需求，所以把尋求證明的工作便擱置下來。一擱置，便「擱置」了三十年之久。直到 1896 年，經過數學界多年的吸收及努力，阿達瑪及瓦萊普桑證明了與其相關的質數定理：

$$\pi(N) \sim \frac{N}{\log(N)}$$

簡單的來說，就是小於一個已知正整數  $N$  的質數個數近似於  $\frac{N}{\log(N)}$ 。質數定理

的證明對黎曼假設是一重要的關鍵。這是因為黎曼在論文中轉動「金鑰匙」（歐拉乘積公式，1737），將歐拉乘積公式和質數定理結合起來，並作了複數形式的變化，得到一個公式，這個公式後來被稱為 zeta 函數。從而，「計算質數個數的函數  $\pi(N)$ 」與「zeta 函數的零點」相連結，黎曼假設便清晰可見，它是解析數論下一個待解的偉大問題。偉大數學家希爾伯特更在 1900 年巴黎國際數學家大會上將其定為 23 個問題之一。不久之後，黎曼假設很快就凌駕所有問題之上，二十世紀許多大數學家先後掉進黎曼假設的迷人魔網，陷於無法自拔的地步。也因為每個數學家的研究偏好，所以發展出不同的脈絡。到了二十世紀末期，美國克雷數學研究所則提供一百萬美金作為獎金，獎勵能提出證明或反證的人。可見數學界對黎曼假設的熱切期盼。

為了精彩呈現黎曼假設，本書數學式子的出現是不可避免的，但作者將數學內容盡量精簡。所以，德比夏爾宣稱只要讀者需修習過高中數學，並且繼續選修過兩門大學數學課程，就能領略本書的魔力。書中架構則分為奇數章及偶數章，所有奇數章的內容做為數學推演，作者由最基本的質數、質數定理講到 zeta 函數、量子力學及黎曼算子；偶數章則主要用來介紹歷史背景和人物傳記，包含黎曼本人的生平，交友狀況、柏林學派的興起及十九、二十世紀數學天才高斯、歐拉、狄利克雷、阿達瑪、哈地、李特伍德、涂林、韋爾、波利亞等人的故事。以下為各章節之標題：

第一部 質數定理 (上冊)

第 1 章 紙牌的戲法

第 2 章 斯土斯民

第 3 章 質數有多少

第 4 章 站在巨人的肩膀上

第 5 章 黎曼的 zeta 函數

- 第 6 章 大融合
- 第 7 章 「金鑰匙」及改良版質數定理
- 第 8 章 並非全無價值
- 第 9 章 擴張定義域
- 第 10 章 一項證明及一個轉折點

## 第二部 黎曼假設 (下冊)

- 第 11 章  $N$ 、 $Z$ 、 $Q$ 、 $R$ 、 $C$
- 第 12 章 希爾伯特的第八問題
- 第 13 章 自變量螞蟻與函數值螞蟻
- 第 14 章 陷入迷魂陣
- 第 15 章 大  $O$  與麥比烏斯的  $\mu$
- 第 16 章 沿臨界線向上爬
- 第 17 章 說一點代數
- 第 18 章 數論遇見量子力學
- 第 19 章 轉動「金鑰匙」
- 第 20 章 黎曼算子及其他研究方法
- 第 21 章 誤差項
- 第 22 章 若非真，即是假
- 尾聲
- 附錄：黎曼假設之歌

## 二、綜合評論

經由作者的生花妙筆，奇偶章節的交錯鋪陳，數學的推演及其歷史並進，讓本書成爲一本不可多得的好書。筆者認爲作者在偶數章節的表現，是其成功之處，因爲經由體驗當時的政治環境、社會狀況及數學交流，我們可以在相當近的距離閱讀黎曼。因此，倘若讀者對數學公式及推演感到頭痛的話，可以將公式部分略過不看，況且有些數學推演還蠻冗長。因而，筆者認爲，雖然作者設定讀者的程度，非修習過兩門大學數學課程者一樣可以體會黎曼假設的重要性。有興趣者，可以特別注意柏林學派這一部分。

從數學史來看，十九世紀到二十世紀初，世界數學發展的重心由法國轉移到德國，而德國數學家也不負使命一棒接一棒地完美演出，直到二次世界大戰希特勒才將數學這個大禮送給美國。我們常將這一時期的德國數學家統稱爲柏林學派與哥廷根學派。而其成功的原因，可以發現這兩個學派的成就，絕對不只是高斯一人的，它是德國有識之士在內憂外患下努力的果實。其中頑固的保守主義者洪堡在 1809 到 1810 年間的教育改革影響最大，他重新塑造全國的中學教育體系成爲十年制的「文科中學」，使得德國各邦的教育體系成爲歐洲最先進的學術制度。黎曼正是在這種環境下成長、學習，一步一步成爲偉大的學者。而德國的發展正

值得台灣借鏡。

總之，《質數魔力》是一本可以輕鬆閱讀的好書，也是一本可以啟發讀者心靈的科普之書。看完本書你應該會跟希爾伯特在 1900 年之後的心情一樣：

有人問希伯特如果他像紅鬍子腓特烈（十二世紀日爾曼國王）一樣，能夠睡上幾個世紀再醒過來，他想要做什麼事情。希爾伯特說：「我會問有沒有人證明了黎曼假設」

## 優秀數學科普作品的指標

指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

### 1. 知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)

- (1) 認識論面向：☆☆☆☆
- (2) 方法論面向：☆☆☆☆
- (3) 歷史或演化面向：☆☆☆☆
- (4) 哲學面向：☆☆☆☆☆
- (5) 教育改革面向：☆☆☆☆☆

### 2. 形式或表達 (Form or representation)

- (1) 創新手法：☆☆☆☆
- (2) 數學知識的洞察力（或洞識）：☆☆☆☆
- (3) 歷史事實的洞察力（或洞識）：☆☆☆☆☆
- (4) 異文化的啟蒙意義：☆☆☆☆
- (5) 忠實可靠的參考文獻：☆☆☆☆
- (6) 敘事的趣味性、可及性與一貫性：☆☆☆☆☆
- (7) 中譯本的品質：☆☆☆☆

### 3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form)

- (1) 青少年層次：☆☆☆☆
- (2) 一般社會大眾：☆☆☆

### 4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage)：

我們想當然的以為黎曼的個性應該是悲情哀傷的，但那僅是此人的外表和態度而已；在那拘謹畏縮的外貌裡面，事實上藏著卓越超群，有驚人勇氣的智慧。無論在常人看來黎曼是多麼膽怯和頹喪，他的數學卻是無畏的橫掃一切，其威力足以與拿破崙的任一戰役相比。當然，他的數學朋友和同僚完全知道和尊崇他。

黎曼使我想起毛姆（S. Maugham）的小說《月亮和六便士》中的一段情節，是得自毛姆崇拜的英雄，畫家高更（P. Gauguin）的生平事蹟。故事裡一位如高更一般畫家，他為了追求藝術的視野到太平洋的一個島嶼上生活，而因癡瘋病死於島上一間破敗的茅屋裡。一位當地的醫生聽說那人快要死了，趕去茅屋，眼前只見一間半塌的淒涼草寮，然而當他走進一看，立刻讓牆上畫滿的亮麗、神秘圖畫所震懾。黎曼就猶如那間茅屋，外表看來可憫、內心的光輝甚於太陽。（51 頁）

