



## 第八章 大統一數學

安德魯·懷爾斯，緘默寡言的英國人，80年代移民到美國，在普林斯頓大學任教授，雖然已經到達40歲的壯年，他卻將最近的7年光陰十分保密的花在研究工作。在1963年，當時10歲的懷爾斯已經著迷於數學，有一天，他在彌爾頓路上的圖書館被一本書吸引，這本書是埃里克·坦普爾·貝爾寫的《最後問題》，其中包括了費瑪最後問題。

這個問題根源於古希臘，但成熟在17世紀。因此，本書第一章說明了畢氏定理如何成為費瑪最後定理的先驅，並藉此提及古希臘時畢達哥拉斯的生平，經歷，兄弟會及畢達哥拉斯定理，和畢氏三元組的無限性，讓讀者了解到畢達哥拉斯的年代和背景，畢氏學派的數學信仰「凡物皆數」，以及膾炙人口的畢氏定理。若在對應畢氏定理的方程式中，吾人將次方改變，變為三次，四次，甚至五次以上，那麼，如同著名的費瑪最後定理所說的：當 $n \geq 3$ 時， $x^n + y^n = z^n$ 無整數解。這是偉大的17世紀法國數學家皮埃爾·德·費瑪提出來的，費瑪宣稱即使全世界的所有的數學家畢其一生去尋找，他們也不會找到一個解。當時的懷爾思想查詢費瑪最後定理的證明，然而，書中沒有證明，任何地方都沒有這個證明，一個10歲的男孩坐在彌爾頓路上的圖書館裏，凝視著這個難得出奇問題，而30年後，懷爾斯已經準備好了。

在本書中，作者雖然也提及費瑪在微積分和機率論方面的貢獻，但他最大的成就還是在數論方面。1601年8月20日，費瑪出生於法國西南部的博蒙-德羅馬捏鎮，其父親是富有的皮革商。他在1631年，被任命為圖盧茲議員顧問，另外的職務，包括在司法部們的工作。他是一個業餘的數學家，陪伴他的是丟番圖的著作《數論》(Arithmetica)，《數論》成了他的指導者。激勵費瑪的這本《數論》是克勞德·基斯帕·貝切特完成的拉丁文譯本，本書每一頁都留有寬大的書邊空白，有時候費瑪會匆忙的在此寫下推理和備註。對於一代代的數學家們來說，這些註記成了費瑪非常寶貴的記錄—傑出的想法和計算。在《數論》的第二卷，它涉及了畢氏定理和三元組，費瑪寫下一個方程式： $x^3 + y^3 = z^3$ ，費瑪不過是將冪從2改為3，但是，他的新方程式看來沒有整數解，他進一步將冪改成大於3的數，得到新的方程式 $x^n + y^n = z^n$ ，此處 $n = 3, 4, 5, \dots$ ，要尋找每一個這種方程式的解，有著同樣的困難，他寫到：「不可能將一個立方數寫成兩個立方數之和，或者將一個4次冪寫成兩個4次冪的和，或者，總的來說，不可能將一個高於2次的冪寫成兩個同樣次冪的和。」這個喜歡惡作劇的天才，又草草寫下一個附加的評註：「我有一個對這個命題十分美妙的證明，這裡空白太小，寫不下。」

費瑪會在給朋友的信函中，敘述他的最新定理，卻不提供相應的證明，他的保密，使他有時候跟別的數學家通信僅僅只是對他們挑逗，發現這個證明就成了他向對方提出的一種挑戰，他固執地拒絕公佈他的數學證明。在費瑪全套定理中，這是需要被證明的評註中的最後一個，三個世紀以來的努力未能找到一個證明，使它成為數學界最費解的謎而名聲遠揚。

本書第三章介紹了18世紀的天才萊昂哈德·歐拉，他對費瑪的最後定理作

出突破性的進展，提到他處理費瑪最後問題大致的做法，想法和此部分的貢獻。此外，還介紹歐拉的生平、歷史背景，以及數學研究工作，當然少不了著名的七橋問題（柯尼斯堡橋遊戲）和歐拉對此的解法。同時，本章也介紹了一位女數學家索菲·熱爾曼對費瑪最後問題的貢獻，以及原本互為競爭的兩人柯西，拉梅對費瑪最後定理的研究工作之失敗，戲劇化的發展，張力十足。

第四章以一個跟費瑪最後定理有趣的故事揭開序幕，本章內容有密碼學，有趣的智力遊戲（牽扯到數學的應用），數學邏輯（希爾伯特、羅素、庫特·哥德爾的數學工作），野蠻的立迫法（計算機的使用），雖不是傳統的證明，但驗證的結果卻使人更堅定費瑪最後定理成立的可信度。另一方面，本章也介紹懷爾斯在攻讀博士研究時接觸的橢圓方程式。

第五章介紹谷山—志村猜想與對數學界的影響。其中包括了日本數學家谷山豐悲劇的一生，志村五郎與谷山豐相識的過程。由於谷山—志村猜想，使得朗蘭茲確信所有主要的數學課程之間存在連結的環鏈，並開始尋找這些統一的環鏈，提出朗蘭茲綱領，而弗賴根據谷山—志村猜想，提出谷山—志村猜想與費瑪最後定理的關聯，誰能證明谷山—志村猜想，誰就能證明費瑪最後定理，肯·里貝特更補強了此一論證，完成了費瑪與谷山—志村之間的鏈環。

第六章介紹宮岡洋一對費瑪最後定理證明的失敗，和傳奇人物伽羅瓦悲劇的一生，及伽羅瓦對群論的貢獻。懷爾斯利用伽羅瓦的工作和科利瓦金和弗萊契方法，經過七年的努力，完成了谷山—志村猜想的證明，也就是說完成費瑪最後定理的證明。1993年6月，劍橋大學牛頓研究所舉辦一個數論方面的研討會，他打算在此公佈，但演講的標題取作「L-函數和算術」，6月23日，當他寫完費瑪最後定理的證明時，他說：「我想，我就在這裡結束」，接著，會場上爆發出一陣持久的鼓掌聲。

在第七章中，作者描述懷爾斯將他的論文分成六章，送給六名審稿人審查。負責第三章的尼克·凱斯發現證明的一個漏洞，懷爾斯起初以為它是一個小問題，沒想到那是一個致命的大問題。他一試再試，始終無法將漏洞補起來，眼見突破的希望成了泡影。更多的數學家則認為懷爾斯有責任公開手稿，在發現問題這最後的十四個月內，是他數學生涯充滿痛苦、羞辱和沮喪的一段時光，就在他準備放棄時，一個高明的洞見使他的苦難到了盡頭。安德魯的費瑪最後定理的證明，終於不再有問題了。

第八章介紹一些重要但仍未解決的問題，以及計算機證明與邏輯證明的差別。

### 三、評論

從本書第一章有有關畢氏如何發現音樂和聲與數目的調和之間的基本關係，畢達哥拉斯首次發現支配物理現象的數學法則，顯示數學與科學之間有著根本的關聯。又如劍橋大學漢斯教授計算了從河的源頭到河出口之間，河流的實際長度與它們直接的距離比近似於 3.14，這些很有趣的例子，顯示數學數處處存在

日常生活中，對讀者來說，原本使人感到抽象的數學，會立刻產生了興趣，可以一下子拉近與讀者的距離，作為一本科普的書，這是很成功的一點。

本來，筆者擔心本書若牽扯到懷爾斯證明的過程，對一般大眾來說太過吃力，但顯然還好，本書只提供了最基本的數論知識，在內容上保留懷爾斯的思考模式，解題的想法，遭遇哪方面的數學困難，發現證明的過程，以及說明了證明費瑪最後定理對數學史的意義，讓吾人對懷爾斯的處境感同身受。本書還穿插了好幾個有趣的數學問題，諸如七橋問題，四色問題等，是如何的對當時數學界所造成的震撼和影響。其它的數學問題，雖簡單但負挑戰性，完全不牽扯到高深的數學知識，因此，本書的確稱得上是一本科普的書籍。難能可貴的，是本書能結合數學與數學史，敘述了從古希臘到近代的數學發展的歷程，大致偏向數論的發展，及數學知識脈絡與歷史是如何相互影響與發展，譬如在何種時空背景下，數學家如何造就哪方面的數學產物，同時，也介紹每位對費瑪最後定理有貢獻的數學家，當時所處的社會背景，人生的經驗與遭遇，在何種環境下進行創作，創作的淵源與靈感去處，以及當時的數學知識背景及同行之間的相處—合作或競爭的模式，同時，讓人了解到社會文化層面如何糾葛數學的發展。

總之，本書作者對數學知識的描述和歷史事實的洞察力，兩者結合起來，恰當地把數學史融入數學內容，同時也說明如何透過數學問題的發現，促使數學的演變。

作者透過數學知識的掌握，著重數學知識的歷史發展背景，和一些數學家與費瑪這個數學問題的關聯，同時也說明數學崇尚絕對的證明與物理的理論完全不同之處，與數學的證明和仰賴計算機證明有何不同，數學邏輯的證明是一種美，並非計算機證明可以取代。本書每章節都雜夾幾題適度的數學問題，激發讀者思考能力，使人理解到發現解答時的興奮與了解數學的美感。

不過，本書某些章節（譬如第三章）刻意說明出場人物的歷史環境和人文背景，數學內容過份龐雜，容易讓人眼花撩亂，而掌握不到重點。然而，如果不鋪陳一點歷史背景，則理論說明難免乾澀使讀者難以下嚥。這是引進數學史的科普著述之兩難，折衷點本來就很難平衡。譬如，在致朋友的信函中，提出自己的數學研究成果或發現，是數學期刊尚未出現前的一種發表形式，這在古希臘阿基米德（公元前三世紀）時期已經存在，只不過到了十六、七世紀，由於數學家利用這種發現的優先權之徵信，來爭取宮廷或貴族的贊助，才使得相關的歷史情境變得十分曲折複雜。在這種情況下，費瑪當然不同於伽利略或笛卡兒，但是，太多的歷史情節無疑會提升閱讀門檻而降低科普味道，這或許是作者選擇適可而止的原因吧。

### 優秀數學科普作品指標

評價方式：指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

#### 1. 知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)

- (1) 認識論面向 (Epistemological aspect) ☆☆☆☆
- (2) 歷史或演化面向 (Historical or evolutionary aspect) : ☆☆☆☆☆
- (3) 與自然科學、人文社會乃至生活經驗的連結 (Connections with natural science, social sciences and humanities as well as daily experiences) :  
☆☆☆☆
- 2. 形式或表達 (Form or representation)
  - (1) 創新手法 (Innovative approach : new story on old stuffs) : ☆☆☆☆☆
  - (2) 數學知識的洞察力 (Insight into mathematical knowledge: inspiring and revealing) : ☆☆☆☆☆
  - (3) 忠實可靠的參考文獻 (Integrity with references) : ☆☆☆☆☆
  - (4) 敘事的趣味性、可及性與一貫性 (Narrative in an interesting, accessible and coherent way) : ☆☆☆
  - (5) 中譯本的品質 (若需要) (Quality of Chinese translation version, if needed) :  
☆☆☆☆
- 3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form)
  - (1) 青少年層次 (for adolescence) : ☆☆☆☆☆
  - (2) 一般社會大眾 (for general public) : ☆☆☆☆☆
- 4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage) :

對我來說，再也沒有別的問題具有與費瑪最後定理相同的意義，這是我童年時代的戀情，沒有東西能取代它，我已經解決了它，我將嘗試別的問題，肯定其中有一些會是非常艱難的，而我將會再次獲得一種成就感。但是，數學中不可能再有別的問題，能像費瑪最後定理那樣使我神往。我得到了這種非常難得的榮幸，就是在我的成年時期追求我兒童時代的夢想。我知道這是難得的榮幸，不過，如果你能在成年時期解決某個對你來說非常重要的事，那麼，再也找不出什麼比這更有意義了。解決問題後，肯定有一種失落感，但同時也有一種無比的輕鬆感。我著迷於這個問題已經8年了，無時無刻 -- 從早晨醒來到晚上入睡 -- 我都在思考它，對於思考一件事那是一段太長的時光。那段特殊的漫長的探索現在結束了，我的心靈歸於平靜。