

誰的頭上亮了燈泡

陳玉芬

台北縣立明德高中國中部

徐任宏，《誰的頭上亮了燈泡》，
台北：時報出版，2007。
ISBN 978-957-13-4730-1。

一、前言

也許是因為本書作者曾長期從事兒童數學以及電台兒童廣播節目之故，因此本書的寫作方式，亦顯得活潑輕鬆。全書內容是作者利用與書中唯一的女主角怡倩的「對話」方式，自然地引進一些與數學相關的有趣知識。讓人一路讀來，輕鬆愉快。

首先，對於書名：「誰的頭上亮了燈泡？」個人覺得饒富意義，誠如作者在序中所述：「卡通中，每當裡面的人物想出了一個好點子時，頭上便會出現一個象徵靈光乍現的點亮的燈泡。數學和科學演進與發展，就是人類不斷在頭上點亮一盞又一盞燈泡的結果。有些燈泡真的是上天恩賜的靈感，就這樣突來乍現，令人驚奇；但是大部分燈泡卻都是經年累月不斷努力奮鬥之後，才在某一天通了電，亮了起來。幾千年來這一盞盞的燈泡照亮了人類的文明史，也讓人類的思想成就達到了一個高峰。」，這就好像《數學思考》一書中的作者群所說的：「當你發現一個不錯靈感時，不妨試著記下 **AHA!** 然後把它寫下來，若發現只有這種方法，也寫下 **AHA!**」，這都代表著學習數學，不僅要學習享受這令人振奮的靈感，更要讓自己的頭腦激盪出更多的靈感！所以，儘管在這本書當中，作者強調在這裡所點亮的燈泡是數學史上的前人所為我們點的，也讓我們分享所照耀出來的路。但是，若我們這些後輩能透過這數千年來的微弱光線，進而激盪出更大的光亮，那就正是閱讀此書的真正價值所在了。

二、內容簡介

這本書共有 23 個單元且各自獨立(如表一)，序號有陰影者，表示為國中階段學習的單元，而事實上，其他部份若以數學的趣味性來分界的話，倒也是國中生可接受的範圍，也就是說，全書的內容可說是「通識」課程，走趣味，溫馨、小品路線，也可說是雅俗共賞，老幼皆宜。或者說，讀者可依心情、天氣來輕鬆選擇閱讀。

表一 「誰的頭上亮了燈泡？」目次表

1	旗桿有多高？ -- 利用「等腰直角三角形」測高度	2	地球的周長怎麼量？ -- 「夾角」與「圓周」的對應關係
3	「圓周率」的故事 -- 利用「割圓術」幫	4	一筆走天涯 -- 「點」與「線」的一筆畫法

	你量圓周率		
5	大自然的數學密碼 -- 「費波納西數列」與自然現象的關係	6	「百牛定理」是什麼？ -- 「畢式定理」的演算方法
7	一猜三百五十年 -- 「費馬最後定理」大拆解	8	四色夠不夠？ -- 「四色定理」與地圖
9	你數中有我，我數中有你 -- 「親和數」中的質因數	10	誰的真因數加起來等於自己？ -- 奇妙的「完全數」
11	11. 十七年蟬的生命奧祕 -- 「質數」與動物的生命週期	12	數學發現了新的行星？ -- 天文學上的神祕數列
13	賭徒的數學 -- 「機率」的應用	14	誰來幫理髮師刮鬍子？ -- 數學裡的「悖論」
15	「湊十五」怎麼玩？ -- 用「幻方」玩遊戲	16	神奇的「幻方」 -- 「幻方」的各種特質大解析
17	比「沒有」還要小？ -- 「負數」的多種記錄方法	18	永遠有空房的旅館 -- 奇妙的「無限」概念
19	誰能見到「赤裸的美神」？ -- 美麗的「歐氏幾何」	20	「幾何」數學的嶄新世界
21	海岸線有多長？ -- 認識「碎形幾何」的概念	22	數字三角藏玄機 -- 「巴斯卡三角」的奇妙數列
23	彩球中的數學 -- 「正多面體」的幾何概念		

三、評論

本書的寫作方式，主要是以生活中的數學作出發，以第 1 單元為例，就是藉由數學家泰利斯從生活中的發現，然後以相似形的概念完成了某些高度的測量，第二單元的地球周長，更是以意想不到的科學常識，輕鬆地計算出地球的周長，完成了長久以來，人們所認為的不可能任務。當然，若以數學的知識面而言，顯然有些單元是可以更盡完善些，以第 3 單元為例，作者介紹了多種的圓周率求法，最後一種是「畢豐投針法」，這是一個相當有趣的實驗做中學，法國博物學家畢豐(comet de Buffon, 1707-1788)提出了幾何概率的新領域，他舉例說：在平面上畫一組間隔為 d 的平行線，假定讓一根均勻的長度為 $l < d$ ，的針隨機落在平面上，畢豐證明針落下來與平行線相交的概率為 $p = \frac{2l}{\pi d}$ 。由於多次重複這個

實驗，記下成功的次數，即可得到概率 p 的經驗值，並令 $l = \frac{d}{2}$ ，根據上面的計

算公式即可得到 $\pi = \frac{1}{p}$ ，所以只要將實驗的總次數除以成功的總次數，即得 π 的

近似值。相信學生對這部份會是很有興趣的，但作者卻只輕描淡寫即過，有些可惜！至於「機率」這單元，作者是藉由賭博的故事引進，雖然故事內容的表達有

所出入，但即便是真人真事，經過長久的歲月也都已真相難辨，所以縱使相同的故事，落入了不同人的手裡，也免不了有一些渲染與增減，我們不妨就當是眾多數學趣事中的一部份吧！

除此之外，作者也舉出了在大自然中，其實也蘊涵了無數或許讀者都不曾發現的數學，諸如：「兔子數列」、「向日葵的生長軌跡」、「鸚鵡螺線」、「黃金比例」原來都與費布納西數列息息相關，又為何蟬要在地底下蟄伏 17 年？與數學中的質數又有何關聯？而數學的某個數列經過特定函數的轉換之後，此數列竟會是各大行星與太陽間距離的一一對應？這些都有待讀者的一一探訪。當然也有一些是希望讀者動手操作觀察與學習的，例如：「點」與「線」的一筆畫法、「畢式定理」、「四色定理」等，讓同學在操作中，發現數學的本質。而對於目的只是要介紹數學中的專有名詞而言，如：「費馬最後定理」、「親和數」、「完全數」等，作者則提供了相當程度的資料補充，像「費馬最後定理」，作者則提供了近三、四百年來各相關數學家所努力的成就，而在「親和數」、「完全數」這部份，更加補充了平常少見的「交連數或親和鏈 (sociable number)」、「虧數 (deficient number)」、「盈數 (abundant number)」、「微虧」、「微盈」。不過，若更能在「數」的特性上多所著墨，¹或許會更增加一些數學知識的層面。另外，「幻方」的內容，既是從西元前 2200 年，²大禹治水時從洛水中的烏龜談起，若再補充有趣的下圖說明，內容將更生動。³



當然，在這本書中，作者也是有提供純數部份的內容，如：「悖論」、「無限」的概念以及「碎形幾何」，或許是作者將此書定位在普羅大眾的閱讀群，所以反倒是在公元前五世紀古希臘的數學家最廣為流傳的齊諾悖論〔Zeno's Paradoxes〕中最著名的「阿基里斯和烏龜賽跑」，反而未談到，有些可惜！以下則是該悖論的內容大概：

¹ 親和數的這些數對，都有相同奇偶性，也就是，同一對裡的兩個數不是同為奇數，就是同為偶數。所有奇數都是 3 的倍數，而所有偶數對的數字總和都是 9 的倍數。(Eves, 2003/2007, pp46-48)

² 若以歷史事件為依據，應是西元前 2200 年左右，而非西元前 4000 年，或許是作者的筆誤。

³ 有人說神龜背上刻著奇特的圖案，人們起初不解其意。後來大禹把洪水治住，讓人們過上了幸福的生活，有人就說神龜背上的圖案包含著治理大水以及管理國家的天機，只有大禹知道，於是這圖案就成爲一種吉祥物，人們並將其配掛在胸前。

烏龜和阿基里斯〔Achilles〕賽跑，烏龜提前跑了一段——設為 100 米，而阿基里斯的速度比烏龜快得多——設他的速度為烏龜的 10 倍，這樣當阿基里斯跑了 100 米到烏龜的出發點時，烏龜向前跑了 10 米；當阿基里斯再追了這 10 米時，烏龜又向前跑了 1 米，……如此繼續下去，因為追趕者必須首先到達被追趕者的原來位置，所以被追趕者總是在追趕者的前面，由此得出阿基里斯永遠追不上烏龜。這顯然與人們在生活中的實際情況是不相符合的。

齊諾的原文已經失傳，流傳下來的是亞里士多德為批判他而作的引述。由於對離散與連續的關係弄不清楚，在以後兩千多年中無法證明悖論錯在何處，其實對「阿基里斯和烏龜賽跑」這樣的問題，只須用無窮等比數列求和。

令在追趕過程中，烏龜跑的總路程為

$$10+1+\frac{1}{10}+\cdots=\frac{10}{1-\frac{1}{10}}=\frac{100}{9}$$

阿基里斯跑的總路程為

$$\begin{aligned} &100+10+1+\frac{1}{10}+\cdots \\ &= \frac{100}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1000}{9} \end{aligned}$$

由於 $\frac{1000}{9} - \frac{100}{9} = 100$ 故阿基里斯在離自己起點 $\frac{1000}{9} = 111.111\cdots$ 米處追上

了烏龜。雖然現階段的國中數學已將「等比數列」刪除，但這些內容與陳述，應不至於太為難！

而古希臘人之所以被這個問題困惑了二千多年，主要是他們將運動中的無限過程與「無限時間」混為一談，因為一個無限過程固然需要無限個時間段，但這無限個時間段之總和卻可以是一個「有限值」。這個問題說明了古希臘人已經發現了「無窮小量」與「很小的量」這兩概念間的矛盾。這個矛盾只有人們掌握了極限知識之後，才能真正地了解。

接著關於「無限」，作者是以希爾伯特（David Hilbert, 1862-1943）的『無窮旅社』比喻，來介紹無窮這個抽象觀念。⁴這對中學生來說是個很好切入的點。至於「碎形幾何」則更是一環陌生的數學了，不過作者倒是用了 11 頁的篇幅來說明，除了避開在數學中利用自然對數的公式計算碎形維度這部份之外，其他方面的資料可說是相當完整，畢竟這樣的一個純數知識，很難一語道盡，就像謝南

⁴ 詳細內容可再參閱胡凱華(2003)。再談無窮，**HPM 通訊** 6(2/3)。

瑞所說：「對於多重碎形結構，我想最好的稱述語，就是：燦爛的混沌」。⁵當然，討論數學，離不開幾何，在書中作者也談到了「歐氏幾何」、「非歐幾何」，更以「柏拉圖立體(正多面體)」做該書的壓軸，⁶但事實上對於《幾何原本》著墨不多，就好比該書中爲了介紹「負數」而引出《九章算術》，但仍是未於多談，因此，若是將焦點放於這二本經典數學史籍上，恐會讓讀者有些失望。

綜觀全書，作者確實使用了大量的數學史資料，幾乎每個單元都涵蓋了多多少少的數學史，雖然作者謙稱對數學史的了解知之甚少，但不難發現，作者是以數學史的素材做鋪陳，利用數學歷史發展中的故事，提高本書的可讀性，其功力亦不容小覷。總的來說，這是一本將數學史與相關的數學知識整理得相當完整的一本科普叢書，讓讀者（尤其是小學至國中的學生）能了解數學的無所不在，而作者也用活潑的方式來講解每一道問題從入題到解題的思考過程，就教育及學習的角度來看，輕鬆無壓力的情境和邏輯分明的思考過程，就是學習數學的重要環節，所以值得讀者細細品味。不過，若作者也想藉機表達出數學就像陽光、空氣和水一樣貼近我們的周遭，是生活中不可或缺的一部分，或許再增加「詩詞欣賞」，更能表達出本書的意圖。值得一提的是，在本書中，未見國中階段的「作圖」部份，今就以詩詞爲例，舉一古代數學中的作圖題，作爲本書評的結束。

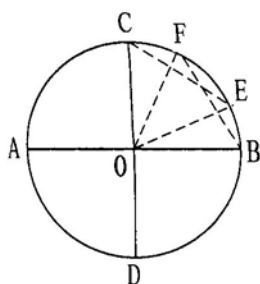
中秋佳節分月餅（中國民間歌謠）

三個智叟動腦筋，平分一個大月餅。

僅有圓規和直尺，尺上刻度不分明。

正在爲難愚公至，幫助分得均又平。

簡單地說，這詩題主要在求利用規、尺將圓三等分。分法如下圖。



參考文獻

1. 高鎖剛（2004）。枯井的啓示。台北：倚天。
2. 徐品方（1997）。數學詩題解。台北：明文。

⁵ 詳細內容可再參閱謝南瑞(2001)。多重的碎形（multifractals）數學傳播，**數學傳播** 25(1)。

⁶ 正多面體的作法收錄《幾何原本》的第 13 卷。在命題 13 描述正四面體的作法，命題 14 就是正八面體，命題 15 爲立方體，命題 16 是正二十面體，命題 17 是正十二面體。

3. Eves, H.(2007)。數學圈（李泳譯）。湖南科學技術出版社（原著出版於 2003, pp46-48）
4. Euclid(2002)。幾何原本（藍紀正、朱恩寬譯）。台北：九章。（英文譯著 *Euclid: The Thirteen Books of the Elements*, 1956）
5. Mason, J., Burton, L., & Stacy, K. (1998)。數學思考（建中 49 屆 314 班全體同學 合譯）。台北：九章（英文譯著 THINKING MATHEMATICALLY）
6. 胡凱華(2003)。再談無窮。**HPM 通訊**，6(2/3)。1-4
7. 謝南瑞(2001)。多重的碎形（multifractals）。**數學傳播**，25(1)，27-32。

優秀數學科普作品的指標

評價方式：指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

- 1 知識的實質內容
 - 認識論面向：☆☆
 - 歷史或演化面向：☆☆
 - 哲學面向：不適用
 - 教育改革面向：不適用
- 2 形式或表達
 - 創新手法：☆☆☆
 - 數學知識的洞察力：☆☆☆
 - 忠實可靠的參考文獻：☆☆☆
 - 歷史事實的洞察力：☆☆☆
 - 敘事的趣味性、可及性與一貫性：☆☆☆☆
 - 中譯本的品質：不需要
- 3 內容與形式如何平衡
 - 青少年層次：☆☆☆☆☆
 - 一般社會大眾：☆☆☆☆☆

摘錄本書最精彩片段

懷爾斯自己就如此描述：「或許我該把我研究數學的經驗，比喻成進入一幢黑漆漆的房子。你剛踏入時，只見一片黑暗，完完全全的黑暗，你跌跌撞撞，碰到了傢具。漸漸地，你領略到傢具的位置，而最後，可能是過了六個月以後，你找到了開關而打開燈。忽然間，全室通明，你能清楚地看見自己身在何處。然後你又進入另一個黑暗房間。。。。。」(頁 80)

建議延伸閱讀：數學圈，枯井的啟示。