

店址：明德國中數學科教學研究會
店長：林志寬 老師
執行長：陳玉芬 老師
大掌櫃：連嘉茵
師傅群：陳惠鈴 汪慈珊 陳怡姣

數食店月刊

第二十九期 98年3月號

「尺規作圖」的限制由來與教學上的定位

陳玉芬

國中生為什麼要學「尺規作圖」？如果要學，應該學多少？從現行的數學課程綱要來看，在升入高中之際，平面幾何的學習已經結束，而進入坐標解析幾何。但是除了平面幾何中的一些重要定理，如畢氏定理（商高定理）在升入高中之後仍會一再運用到之外，「尺規作圖」卻從此消聲匿跡了。所以，「尺規作圖」若只是扮演一個階段性的任務，那麼，它的任務究竟是什麼？同時在國中的平面幾何課程中，「尺規作圖」只是某單元中的一小節，所以，學生在學習的過程中，對尺規作圖的瞭解、大多是一知半解，遑論「尺規作圖」背後之數學的知識價值與歷史意義。因此，我們希望透過本篇的簡略說明，讓大家對尺規作圖的教學目的能更加清晰。

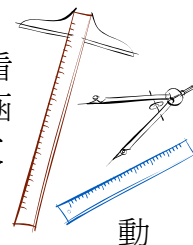
從數學歷史的發展來看，我們知道「尺規作圖」的限制源自於希臘的學術風潮。¹接著，柏拉圖（Plato, 公元前 427-347）的哲學思想也有著關鍵性的影響，他認為：幾何觀念是不存在於物質層面的，是超乎經驗而存在的，是以「形式」（form）存在於某一個理想世界中。



換言之，柏拉圖認為，數學家們要確實掌握一些用心靈的眼睛、才能看得清東西。現實世界中的一切，唯有透過數學嚴謹的訓練，才可能掌握不斷變化的自然現象背後的永恆不變的真理。所以，只要有圓和直線這兩個柏拉圖認為最簡單、最完美的圖形，應該就足以描繪其他的圖形了。而且，若允許使用其他的機械工具，那麼，感覺成分將多於思考成分，從而就顯得膚淺且幼稚了（蘇惠玉，1999）。而這樣的一個思想，從歐幾里得的《幾何原本》（The Elements）中有了具體呈現。

所以簡單地說，作圖的目的有二個，一個是，我們對於一些「顯而易見」的概念，如「複製一個等角或等線段長」，我們相信它是存在的，但如何證明？透過作圖，透過演繹論證，是可以讓我們信服的；而另一個是，在作圖中所延伸出的概念，如：該如何作這樣的圖，或為何這圖要如此作？這樣的邏輯訓練更是學習數學的過程中不可或缺的。這樣看來，「尺規作圖」的定位就很清楚了，「它不僅提供平面幾何實作的部分，或者說在某些公設條件之下事實存在的部分，更具有在整個作圖過程中，經過思索、細細佈局並求推理之完整的核心教育意義」（張海潮，2005b）。所以，就此觀點而言，「尺規作圖」是可以提供某些程度上的訓練的。也就是說，至少在事實存在的部分，「尺規作圖」不能消失，而在整個作圖過程中，經過思索、佈局、推理之完整的核心教育而言，「尺規作圖」亦應存在。

而從歷史的發展背景來看，「尺規作圖」的限制只是反映了當時社會脈絡下的數學知識為何。那麼現今對於「尺規作圖」的限制又是如何？如果真是希望能提供某些程度上的訓練與整個作圖過程中，經過思索、佈局、推理之完整的演繹論證，顯然我們只看到了承襲了《幾何原本》中「尺規作圖」的「樣子」，忽略了這些史實背後所蘊涵的文化意義！就猶如鳥會築巢，但不懂得編織，織工懂得編織，卻不瞭解編織的文化（Eve, 1998），都令人遺憾。因為透過研究數學史的例子，不僅提供學生欣賞數學實用性的合理解釋，同時也會發展學生自我的學習目的，並藉由審美的批判引求知慾的動機（Fasanelli, 2000）。當然，倒也未必要讓學生經歷如古人般迂迴曲折的學習，但至少可將古代的作法視為一種選擇的工具。



¹也可以說，從希臘時期的泰勒斯（Thales, 640-546 B.C.）在數學中引入了邏輯證明之後，幾何學逐漸發展成為一門獨立的、演繹的科學（梁宗巨，1998）。

用數學對稱剪出數學的美



207 羅皓文 銳利



207 李宜蓓 杯墊



203 邱繼成 春



207 徐誌鴻 無極



203 李珮菱 黑



207 汪慈珊 隧道



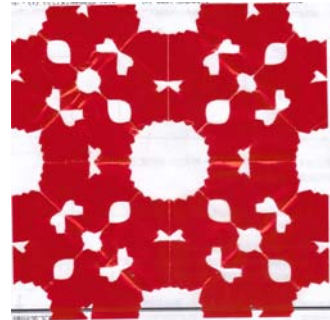
207 謝均君 花瓶



203 郭仕杰 藍色幸運草



207 陳惠鈴 綠世界



203 黎瑋如 血蝴蝶



207 林文龍 萬花筒



207 陳怡姣 馬雅圖騰



203 鄭若盈 聖誕樹



207 張人翔 皇冠



207 任治誠 握手言和

生鏽的圓規

同學們，可曾想過一把生鏽的圓規能做出什麼樣的幾何圖形？最直覺想到的是，正三角形行嗎？以下這個故事將再度讓你（妳）的頭腦深呼吸！

世界末日之後的地球，人類的文明將嚴重退化。末日後的猿猴即使找到以前人類使用過的圓規，也是一把生了鏽的圓規；因為圓規生了鏽，所以猿猴有可能誤以為人類畫圖用的圓規之張角是固定不變的，也就是說，同一把圓規只能畫固定半徑的圓。在這樣的誤解之下，猿猴可能做出的點或圖形顯然少很多。最簡單的情形是正三角形可以作出來嗎？手上僅有一把生鏽的圓規，令其兩個尖點相距 1 單位，而紙上有兩個已知點 A 與 B ，它們相距小於 2 單位。在作圖過程只能用這把生鏽的圓規的要求下，作出紙上的一點 C 使得 $\triangle ABC$ 為正三角形。

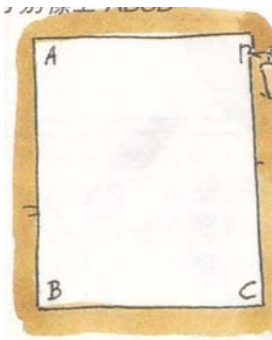
資料來源：許志農(2009)。龍騰數亦優。<http://www.lungteng.com.tw/LungTengNet/Member/Web/PublishPage.aspx>



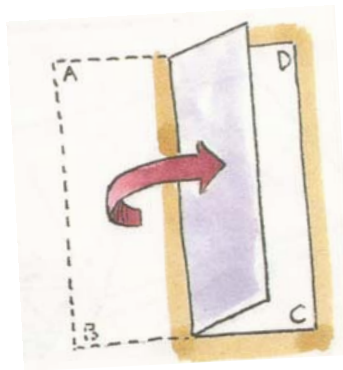
趕快動手畫畫看，一定得到答案的，記得要來領下午茶哦！



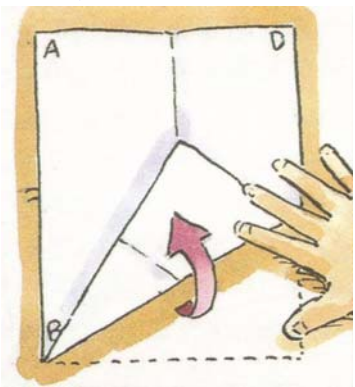
完成上面的作圖之後，請同學再依照下列的摺紙方式依序完成所指定的步驟，然後告訴我們你摺出了什麼圖形？要讓你（妳）的證明具有說服力哦！



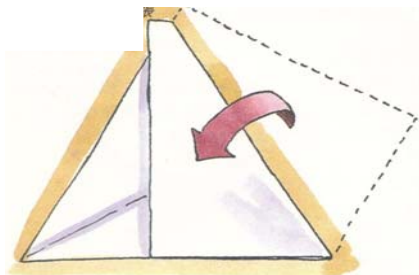
步驟 1



步驟 2



步驟 3



步驟 4

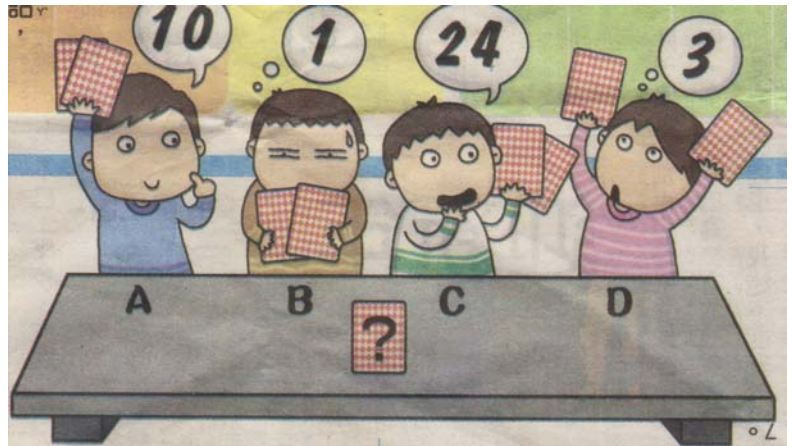


步驟 5

資料來源：Ross (1997)。快樂學習三角形。台北：遠哲科學教育基金會。

數學Fun一下

有9張紙牌，分別是1~9。甲、乙、丙、丁四人取牌，每人拿2張，已知甲取的兩張牌之和是10；乙取的兩張牌之差是1；丙取的兩張牌之積是24；丁取的兩張牌之商是3，聰明的同學們，請說出他們四人各拿了哪兩紙牌？剩下的一張又是什麼牌呢？

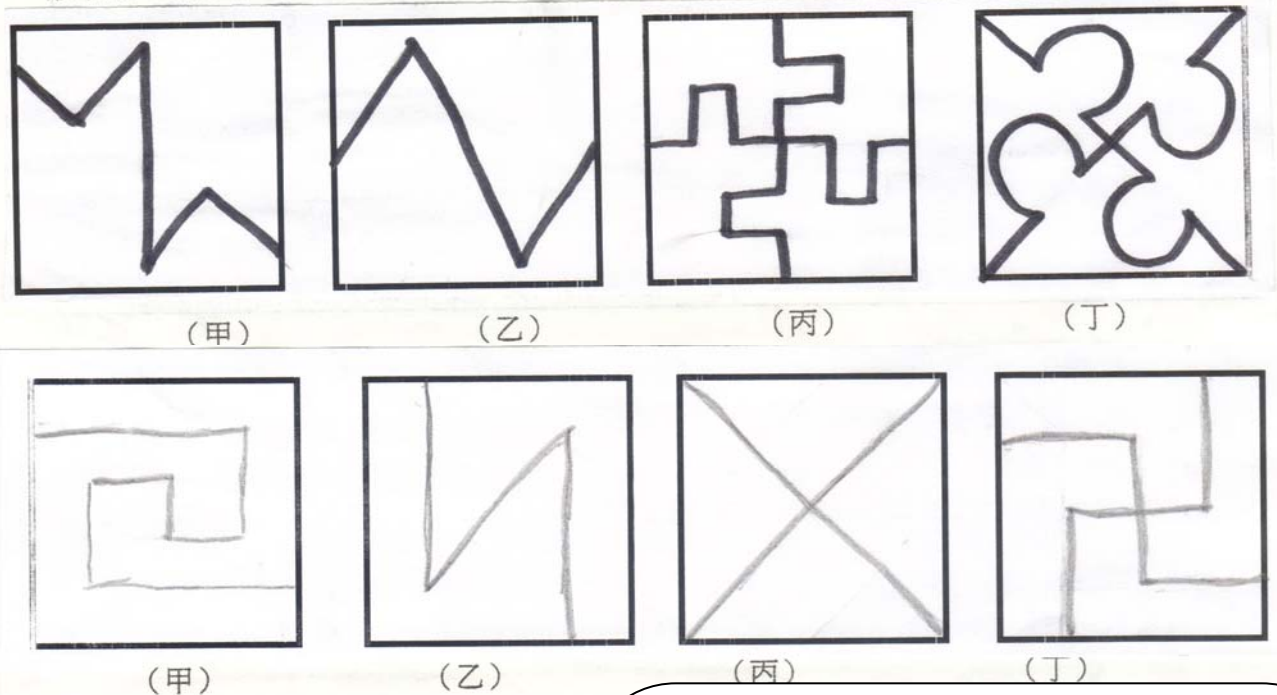


資料來源：國語日報（98.3.3 生活版）

資料提供者：207 連嘉茵



編輯部感激下列二位中一同學（上圖為102 王星敏、下圖為104 陳敬諺）熱情參與前期的對稱分割，今特將他（她）們的解答呈列於下，歡迎大家一起參與這塊數學園地。



老師公佈數學成績：

"小華三十分、小明二十分……"

小豬：我考0分耶！

小狗：怎麼辦，我也是耶…

小豬：我們兩個考同分，老師會不會以為我們作弊啊？ ※※○○○

同學們，照過來！

凡符合下列任一條件者，即可領取下午茶一份！

1. 凡是提供「找碴」問題並經刊出者。
 2. 凡是提供「數學謎題創意設計」經刊出者。
 3. 凡答對本刊中所有提出之問題者。
 4. 凡提供任何與數學相關知識且經刊出者。
- 衷心期待這個數學園地能與大家一同耕耘，一同成長。如有任何提供的寶貴資料希望能寄至下列信箱，編輯部感激您！

g9247019@gmail.com