

## 從畢氏定理談「無字證明」(下)

陳玉芬 撰稿

在上期中，提到了從畢氏定理中，看到的基本面積公式，而在本期中，我們則再舉中山女高的林怡萱學生，針對柯西不等式所提出的「無字證明」，<sup>1</sup>因為這樣的靈感竟也是來自我們熟悉的畢氏定理。今做簡短的證明如下：

(1) 說明右圖中的白色區域面積等於下圖中的白色區域面積。

這是顯而易見的，因為  $ab + cd = \frac{1}{2}ab \times 2 + \frac{1}{2}cd \times 2$

所以右上圖灰色面積  $ac + bd$  等於右下圖灰色面積

(2) 將右圖的灰色面積以符號  $a, b, c, d$  表示。

(3) 證明下圖中的灰色區域面積為  $\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} \sin \theta$ 。

因為，灰色面積的底邊長為  $\sqrt{a^2 + b^2}$ ，

灰色面積的高為  $\sqrt{c^2 + d^2} \sin \theta$ ，

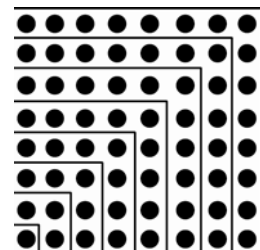
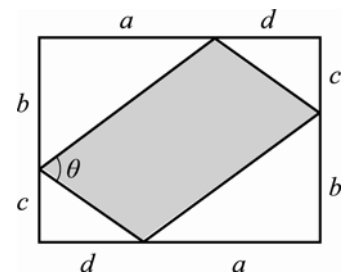
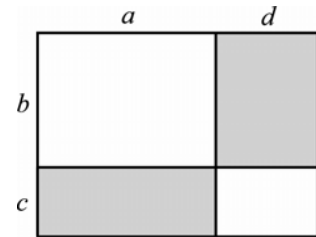
所以，灰色區域面積為  $\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} \sin \theta$

(4) 由(1)、(3)得  $ac + bd = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} \sin \theta$

又因為  $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ ，所以  $0 \leq \sin^2 \theta \leq 1$

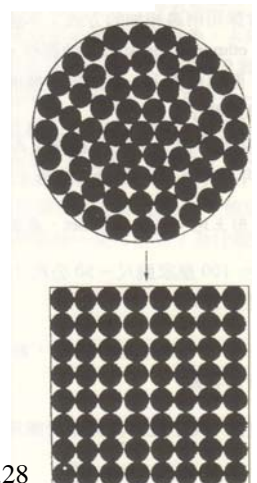
$$(ac + bd)^2 = (\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} \sin \theta)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

柯西不等式  $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$  成立



圖四

在本文最後，再附上另一個代數上的「圖說一體、不證自明」，以等差級數而言，只  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ 。需用圖四的說明即可完成。當然，不是每一個圖解都是如此完美或成功的，以右圖五例，說的是希臘時期的三大作圖難題之一的「化圓為方」，<sup>2</sup>雖然面積有待商榷，但至少也表達了另類的創意思考。



<sup>1</sup> 許志農(2008)。師父中的師父。資料取自：<http://math.ntnu.edu.tw/~maco/arith.htm> 2008.11.28

<sup>2</sup> 洪萬生(2006)。此零非彼0，台北：台灣商務。

## 找「碴」，就有「茶」

同學們，是否想過，數學中也有很多的「碴」可以找？還是你（妳）以為數學本身就是一個很大的「碴」？無論如何，希望下面的「碴」你可以找到，記得要來領下午「茶」哦！

<p>問題 1：化簡一元一次式 <math>\frac{x+3}{4} - \frac{x-2}{3} + x</math></p> <p>Sol: 同乘 12 得：<math>3(x+3) - 4(x-2) + 12x</math>              化簡得：<math>3x+9-4x-2+12x</math>              同類項合併得：<math>(3x-4x+12x)+(9-2)</math>              整理得：<math>(3x-16x)+7</math>              最後得：<math>-13x+7</math></p>	<p>問題 2：解方程式 <math>\sqrt{x^2-1}+3=2</math></p> <p>Sol: 移項得 <math>\sqrt{x^2-1}=2-3</math></p> <p>整理得 <math>\sqrt{x^2-1}=-1</math>，              二邊平方得 <math>x^2-1=1</math>              移項得 <math>x^2=2</math>              二邊開平方根得 <math>x=\sqrt{2}</math></p>
--	--

請將上面二題中，所有的「碴」找出來，並解出正確的解，你（妳）就有一份精緻下午茶哦！當然，如果你（妳）願意精心設計一題找「碴」題，讓大家在茶餘飯後能夠思索你（妳）的找「碴」題，那本編輯部不僅為你（妳）刊登，更將為你（妳）爭取嘉獎一次。

## 數學謎題創意設計

我們總是在很多時候看到或引用與數學有關的謎語，但卻從未想過這樣的點子是否自己也能創造？在經過一個活動設計之後，相信學長，姐們一定很訝異於我們一年級的學弟妹竟有如此之創意才華唷！

謎題	設計者	答案	謎題	設計者	答案
砍樹	103 曾莉庭	倒數（樹）	跟祖父比賽	106 陳思麒	公比
一定要吃素	103 曾莉庭	指數（素）	黃+藍	106 李雅晴	結合律（綠）
一上一下	103 楊凱卉	=（等號）	幫忙數錢	106 陳思麒	代數
不會彎	103 楊凱卉	絕對值（直）	一億乘零	107 呂佩	毀於一旦
圓圈長青苔	110 鄭羽芝	圓周率（綠）	月下老人的紅線	105 洪啟峻	連心線
拿尺畫線	110 鄭羽芝	絕對值（直）	10+1	105 洪啟峻	絕對值
考試作弊	102 王星敏	假分數	跳躍高手	105 洪啟峻	代數（袋鼠）
考試不作弊	102 王星敏	真分數	先有雞還是先有蛋	109 無名氏	無解
大象搬家	108 鍾易澄	移項（象）	鬍子太長	109 無名氏	括弧
1 左 1 右	106 吳國璋	絕對值	鯨魚	109 無名氏	大於（魚）

※ 在此特別補充說明：109 班鄭臣峻同學堅持要使用「無名氏」，故本編輯部為求尊重，於設計欄中特以「無名氏」稱之。

輕鬆一下：

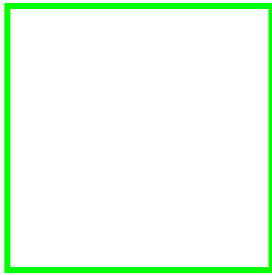
有一天 0 遇到了 8，0 對 8 說了一句話，  
 「胖就胖嘛！幹嘛繫皮帶？……：@」



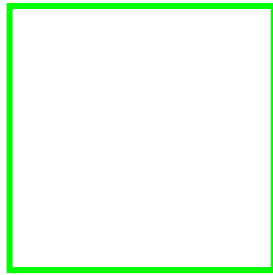
資料取自 <http://euler.tn.edu.tw/joke02.htm> 97.12.20

## 你被制約了嗎？——如何將正方形 2 等分？

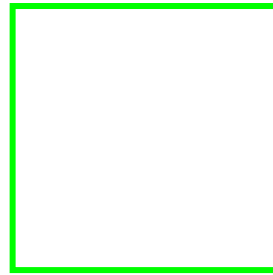
這是在發現月刊第 128 期中，該篇作者談到的一個很有趣的問題。如果請你將下面的甲、乙二個空白正方形「圖形」2 等分，你要如何畫分？你是否也是只能畫出本頁末端所給的答案中的(a)-(c)圖中的其中二種呢？如果是，那麼不妨欣賞一下，該作者提供的另類思考！從答案中，我們可以看出作者是用了「對稱」與「出入相補（即互有所補）」的概念，成功地將圖形均分了。當然，眼尖的同學，你可能發現圖(h) 只是「面積」2 等分，並未將「圖形」二等分，但無論如何，這些都是有趣又富有開創性的答案。若真有所悟，不妨利用下列丙、丁二個空白正方形予以 4 等分吧！相信自己，你會找到更有創意的答案！（記得要來領下午茶哦）



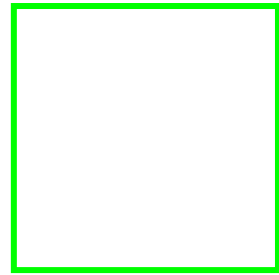
(甲)



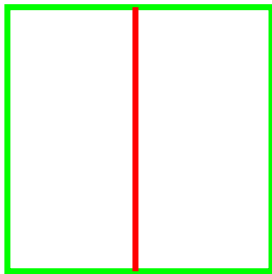
(乙)



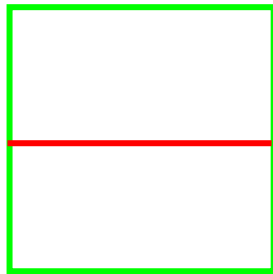
(丙)



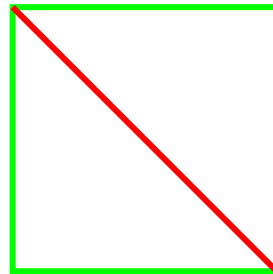
(丁)



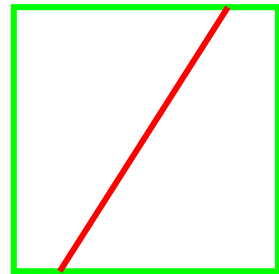
(a)



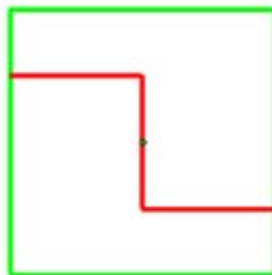
(b)



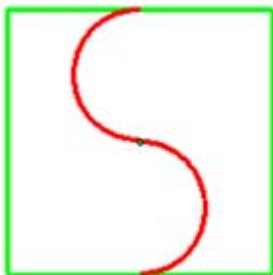
(c)



(d)



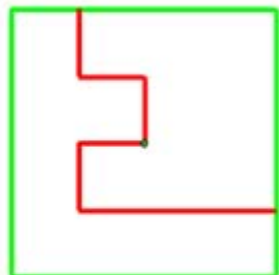
(e)



(f)



(g)



(h)

資料來源：彭良禎(2008)。發現月刊第 148 期。

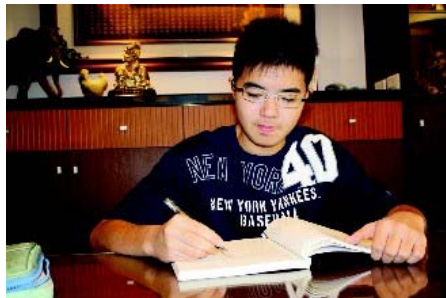
## 滿分書房系列報導-----下苦工 天天練數學 20 題

也許當同學們苦於數學究竟該如何學習才能得高分時，不妨參考一下這些基測考滿分的成功者，他（她）們是如何地準備數學這一科，或許能得到另一種的啟發。

### 張家硯《下苦工 天天練數學 20 題

【聯合報／本報記者曾增勳 2008/12/21】

桃園縣立慈文國中畢業的張家硯是在進入國中後功課才突飛猛進，他用自己的方法讀書、做筆記，以 5 科滿分、作文 5 級分的基測成績，進入國立武陵高中數理資優班，「上課認真聽、做筆記，每天都把問題弄懂、弄通」，最好還能超前學習進度。



#### 老師啟發 功課大躍進

張家硯家住桃園市，小時候不

大喜歡講話，但是看到喜歡的玩具卻可以看上 1、2 個小時，在父母印象中「小學成績維持中上」。上國中資優班後，在同學競爭刺激下，又遇到數學老師張振家的啟發，讓他對數學產生興趣，成績也一直名列前茅。他小五起學圍棋，就一直喜歡下圍棋，拿到圍棋一段，國中時期喜歡打球、運動，喜歡看課外書籍，金庸小說中，他最喜歡看神鵰俠侶，是老師眼中會與同學玩在一起、又會讀書的學生。

張家硯喜歡在父親的書房看書、做功課，從小就養成愛看書習慣。記者曾增勳／攝影

#### 超前學習 不懂問到懂

張家硯上過作文補習班外，國中後沒有補過習，基測如何考滿分？他說，他的數學受張振家老師啟發後，愈學愈好，上課一定認真聽，勤做筆記，每天基本固定會做 20 題數學題，空檔時，自己會找課外題材或設法解老師給的題目，國中數學編得太簡單，他經常超前學習課程，不懂問老師，一定把問題弄懂。他從國中起，不論是英文、國文還是理化，都是上課認真聽老師講課、做筆記，回家後立即複習。

### 張家硯小檔案

<b>國中基測</b>	國文、數學、英文、自然、社會5科滿分、作文5級分
<b>生日</b>	民國82年出生
<b>星座</b>	雙子座
<b>興趣</b>	圍棋、撲克牌、金庸小說
<b>喜歡運動</b>	足球
<b>喜歡學科</b>	數學
<b>偶像</b>	王建民

製表／曾增勳

同學們，照過來！

凡符合下列任一條件者，即可領取下午茶一份！

1. 凡是提供「找碴」問題並經刊出者。
2. 凡是提供「數學謎題創意設計」經刊出者。
3. 凡答對本刊中所有提出之問題者。
4. 凡提供任何與數學相關知識且經刊出者。

衷心期待這個數學園地能與大家一同耕耘，一同成長。如有任何提供的寶貴資料希望能寄至下列信箱，編輯部感激您！

g9247019@gmail.com

### 前期謎底揭曉

(1) 點點滴滴記兒心 猜一個數學單位  
答案兆

(2) 1 2 3 4 5 6 9 猜一個成語 答案七零八落  
※歐幾里德答對第 1 題，高斯答對第 4 題。

※ 裝有地雷的地雷區共有 11 個，如下圖

