

# 記憶著愛情的數學等式

單維彰

國立中央大學數學系  
書名：《博士熱愛的算式》  
作者：小川洋子  
譯者：王蘊潔  
出版社：麥田【文學部屋 14】  
出版年份：2004  
出版資料：平裝共頁，定價元  
國際書碼：ISBN 986-7537-90-4.

在『百部』計畫之中，這是一部異類：它並不是數學科普書籍，談的並非數學知識，甚至也稱不上數學欣賞；它是一部與數學的人情和知識有關的小說，日本女作家小川洋子的創作，專業日文譯者王蘊潔的翻譯。『博士』指的是一名因為意外提早退休的數學教授，他熱愛的算式，就是所謂數學中最美的等式：<sup>1</sup>

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

『美』是一個無法用其他文字定義的文字：妳不妨拿一本辭典查詢『美』的字義，那份解釋裡面一定會有跟『美』等價的字詞，如果妳追查下去，最後就會查回『美』這個字。在辭典中產生這種循環解釋的字詞時，就顯示它是一種本質的元素，需要哲學家或語言學家嚴肅地處理。如果語言學要像數學一樣，指定幾個少數的公設或設準，把它們當作基礎而不再解釋（例如幾何學中的『點』和『線』），將整個學科嚴謹建立在那少數不能解釋的公設之上，則『美』肯定應該是被指定為公設的候選詞之一；另一個可能被指定為公設的詞是『意義』。

所以，其實『美』是沒有定義，因此也沒有客觀標準的。要說哪條等式是數學中最美的，當然要冒著被反對的風險；就好像要指定哪個人最美也很危險一樣，今年（2007）的香港小姐恰好為我們提供一個有趣的例子。<sup>2</sup>但是我卻可以相當大膽地告訴讀者，那條等式是獲得數學家長期共識的最美等式。反對的聲音當

---

<sup>1</sup> 我在《科學月刊》以連續十一個月的專欄篇幅，從高中數學發展必要的基礎，企圖帶領讀者真正懂得欣賞這條數學中最美的等式，最後一篇發表在《科學月刊》2007年8月號【數·生活與學習】專欄。

<sup>2</sup> 據《聯合報》2007/07/24 一篇以〈港姐歷年最醜·香港沒靚女了〉為題報導（附照片），稱今年香港小姐冠軍... (是) 個「爆冷門」的結果，讓許多香港和大陸民眾無法接受。有大陸網友挖苦稱：「配合豬年」的結果。報導原文放在<http://udn.com/NEWS/WORLD/WOR1/3940915.shtml>。另有人轉載於部落格<http://blog.sina.com.tw/cnear/article.php?pbgid=33723&entryid=574154>。

然會有，不過還不值得圈外人注意。這是個很有趣的現象，在數學這樣絕對客觀的行業裡，卻形成了幾乎一致的主觀概念。我做過好幾次非正式的實驗（這些實驗當然不能寫成數學論文，但是心理學者或教育學者卻可以參考），只要你列出幾種等價的數學敘述，譬如同一道題目的七種不同解法，或者指稱同一個概念的四種等價描述，拿去請教受過專業數學訓練的人，讓他們挑出一個他們認為最『美』的，你會驚訝地發現，他們挑出同一個。

即使對一個專業素養尚未完成的大學生，要他舉一個偶函數的例子，九成會舉出  $y = x^2$ ，但是當我問他們為甚麼不說  $y = 0$ ？幾乎每一個人都能夠會心地笑出來。數學所認為的美，總是以「簡單」作為最基本的前提，而以「深刻」作為最終的評斷。最美的等式當然要既簡單又深刻，而且還可以在某種程度上「雅俗共賞」：它位於數學的核心主軸，而不在一個專門化的分枝裡。這條等式之所以獲得「最美」的共識，我個人的解釋是，數學中最重要的五個常數： $1$ ， $0$ ， $\pi$ ， $i$ 和 $e$ ，最基本的三個計算：加法、乘法和次方，最核心的一個觀念：等於，通過近代數學中最基礎最深刻的概念：微積分，用再簡單不過的方式寫在一起。比它簡單的沒它深刻，比它深刻的沒它簡單，所以它最美。

雖然，即使讀者不懂得為甚麼這個等式會「最美」，也能欣賞洋子的這部小說。但是，我想要推薦讀到這篇書介的讀者，帶著科普的知識去閱讀這個故事，或者帶著這個故事去閱讀科普知識，如果您能夠真正在數學意義上了解它之所以「最美」，一定能在閱讀的心靈經驗上獲至相得益彰的快樂。

但是，小說家卻能用另一種方式闡述它的美。觀察小川洋子的背景，她跟我同一個時代（同年同月出生），受的是完整的文學教育，可能自從高中畢業就不會正式學習數學。然而，可能日本的中學教育和我國一樣嚴謹，所以，她寫在小說情節裡的數學，明顯深過前一陣子我們讀過的歐美作者，她寫了「真正的」數學。相較之下，那些西方作者在小說裡經常只有觸及數學的想像，或者只是影射或暗指或引用為談話的數學元素而已。或許是小川本人的數學素養超過那些西方作者；也許，和台灣類似的強迫而深入的日本數學教育，在這位文科大學畢業生的身上留下了良好的根基，在她年近四十歲的時候開花結果，寫成這部當時被認為可以作為生涯代表作的這本小說。

即使如此，《博士熱愛的算式》畢竟是一本後來改編成電影的暢銷小說，而不是數學科普。閱讀這部小說是一個美好的經驗。跟西方小說在風格或氛圍上不同的是，這個小小的故事沒有強烈的或激動的情節，不講究複雜而翔實的歷史或地理或科學的背景，或許是一種日本風味吧，寬鬆的排版讓人輕鬆閱讀，故事不太長，讓人可以一氣呵成地讀完，而不至於疲倦或忘記細節，故事也不太短，讓人能夠深入情節和氣氛，而獲得心靈上的共鳴。

故事的第一段話就把我吸引了：

我和兒子都叫他博士，博士則叫我兒子「根號」，因為兒子的頭頂平坦得像根號。「哇，裡面應該裝了一個聰明的腦袋。」博士摸著兒子的頭說道，絲毫沒有發現把兒子的頭髮都弄亂了。兒子充滿警戒地縮著脖子，他不喜歡同學拿這件事和他開玩笑，所以平時整天戴著帽子。「只要使用根號，就可以給無窮的數字、肉眼看不到的數字一個明確的身份。」 (p. 3)

故事裡「真正的」數學就一定需要真正的數學知識才能欣賞嗎？絕對不是的。日本的廣大讀者能夠受感動，台灣的讀者一定也可以。這就是小川厲害的地方，這就是它能夠被視為生涯代表作的原因。書中第一人稱的敘事者，是一位三十出頭、年輕時曾經輕狂而輟學的單親媽媽，因為沒有完成學業而只能以管家為業，獨立撫養兒子長大。讀這本書所需要的數學知識，就像這位管家一樣，只要高職肄業即可，外加一顆清醒的頭腦和一副還沒死絕的好奇心。

王蘊潔小姐的翻譯平順，幾乎不感覺在翻譯。我只有兩個很不重要的小意見：p. 10 所說「四的連乘」應該是「四階乘」，p. 20 的「代數的整數論」應該是「代數數論」。大概日文和中文本來很近，而原作又寫得平易近人，故事的豐富性超過了偶而出現的數學名詞，即使作者知道她使用了專有名詞，也很有自信那些名詞不會從故事情節中凸顯出來，讀者不會被名詞或概念卡住，而會流暢地從情節中去感受它。而且，有些話本來就是藉由管家的口中說出來，不專業也是自然的。

一億以下共有 576-1455 個質數嗎（女管家的電話號碼，p. 10）？誰會記得這種事？誰會想到用這個數來作文章？出於好奇，我用 Maple 的 `ithprime()` 指令，問第 5,761,455 個質數是什麼（2 是第一個質數）？得到 99,999,989：九千九百九十九萬九千九百八十九。下一個質數是 100,000,007：一億零七。真有趣，超過一億的第一個質數是一億加七，在那之前有五百七十六萬一千四百五十五個質數；不到一億的最大質數是一億減十一。

220 和 284 是一對友誼數 (amicable numbers)；意思是說，220 和 284 的真因數之和等於對方。真不好意思，身為一個職業的數學工作者，卻是從這本小說首次知道這種整數的關係。這學期在台大教一門「數學軟體」的課程，其中一部分帶學生練習 Maple。我就趁機會研究如何利用 Maple 來計算友誼數，發現很簡單，所以，就順便出了一份作業給學生，要求他們寫一個 `amicable(n)` 的程式，將正整數  $n$  以下的友誼數全部列出來（這個程式不理會電腦的記憶體與執行時間）。更大的友誼數有 [1184, 1210]，[2620, 2924]，[5020, 5564]，[6232, 6368]...。所以三位數的友誼數只有一對啊。這裡不包括「自我友誼」的數，也就是完全數：6, 28, 496, 8128, ... (真因數之和等於自己)。

博士是一位數學教授，47 歲的時候發生一場車禍，之後就罹患這種奇怪的腦神經損傷：車禍以前的記憶都留著（所以，他的數學知識都保存了下來），邏輯推理能力也都正常，但是，車禍以後，他只有八十分鐘的記憶。他跟管家（和所有人）的關係，都得靠著隨身攜帶的小紙片以及邏輯推理來維持。想像這樣的情況：根據記錄，眼前這個陌生的小孩，我應該已經認識他一年半了，我們幾乎每天一起吃晚餐，我看他的功課，教他數學，我愛他如自己的兒子。今天是他的生日，今天應該送來一塊生日蛋糕，我買了一副棒球手套給他當作生日禮物，放在樓梯下面右邊的櫃子裡，我們曾經一起看棒球。他必須靠這種文字記錄，去愛一個其實他並不認識的小男孩。他身旁的人在自己的心裡累積了跟他親近生活了十八個月的關心和愛，但是，每天早晨，他都是第一次跟自己見面。這需要，雙方，多麼地努力，有多少耐心與愛的支持，才能維持這樣的友情或愛情？其實，每次八十分鐘的互動，有沒有可能發展出愛情？

博士不記得眼前發生了什麼事，但是，憑觀察和邏輯他知道發生了感情方面的糾紛。他想必記得他和嫂子之間的過去，他們可能曾經約定過一種「最後通牒」，在雙方最為堅持不下的時候，他如果決定拿出那個代表了純潔、代表了愛、代表了信任的這條等式，就表示他的決心，也代表請她原諒或請她接納。

這條等式的意義超過了女管家的能力範圍，但是，她的人性與本能彌補了知識的不足，越過數學的知識而直接跟隨博士愛上了這條等式。這是全書的高潮（對我這個數學老師來說啦），我不禁佩服這位日本女作家，是怎麼樣的數學素養和文學修為，讓她對一條數學等式寫出如此溫情的描述？請參看以下「摘錄本書最精彩片段」。

一個只有八十分鐘工作記憶區的人，能夠解決大型數學問題嗎？故事裡博士曾經花了一個禮拜（或者更長）的時間，解決一個懸賞的問題。他的推理能力和知識都固然存在，但是，思維的過程如果超過八十分鐘就會忘記。雖然他可以把過程和中間步驟的結果寫下來，然而，忘記之後重新閱讀與理解，還是需要時間，一旦那些中間結果離開了大腦，就不能用來推理。因此，數學家可能在失聰或失明之後，還能思考大型問題（例如歐拉 (Euler) 或 Pontryagin），但是極不可能在失去記憶力之後，還能有什麼作為。不過，相對小川洋子這個美麗絕倫創意十足的故事，我的這個質疑只是個無聊的呢喃而已。

## 優秀數學科普作品的指標

**評價方式：指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。**

### 1 知識的實質內容

- 認識論面向：不適用

- 歷史或演化面向：不適用
  - 哲學面向：不適用
  - 教育改革面向：不適用
- 2 形式或表達
- 創新手法：☆☆☆☆☆
  - 數學知識的洞察力：☆☆☆
  - 忠實可靠的參考文獻：不適用
  - 敘事的趣味性、可及性與一貫性：☆☆☆☆☆
  - 中譯本的品質：☆☆☆☆
- 3 內容與形式如何平衡
- 青少年層次：☆☆☆☆
  - 一般社會大眾：☆☆☆☆☆

### 摘錄本書最精彩片段

（故事裡的女管家拿著寫了這條等式的小紙片，到圖書館去找尋線索。pp. 167-168）

沈重的書本讓我的手麻痺了，我甩了甩手，重新翻開書本，腦海裡想著這位十八世紀最偉大的數學家，雷奧哈德爾·歐拉。我雖然對他一無所知，但手拿這個公式，我覺得自己可以感受到他的體溫。歐拉用了這個極不自然的概念，編織出一個公式。他從這些看似毫無關係的數字中，發現了彼此之間自然的關聯。

$e$  的  $\pi$  和  $i$  之積的次方再加上 1 就變成了 0。

我重新看著博士的紙條。永無止境地循環下去的數字，和讓人難以捉摸的虛數畫出簡潔的軌跡，在某一點落地。雖然沒有圓的出現，但來自宇宙的  $\pi$  飄然地來到  $e$  的身旁，和害羞的  $i$  握著手。他們的身體緊緊地靠在一起，屏住呼吸，但有人加了一以後，世界就毫無預警地發生了巨大的變化。一卻都歸於零。歐拉公式就像是暗夜中閃現的一道流星；也像是刻在漆黑的洞窟裡的一行詩句。我被這個公式的美深深地打動了，再度將紙條放進票夾。

走下圖書館的樓梯時，我回頭看了一下，數學書籍區仍然沒有一個人影，一片寂靜，沒有人知道那裡隱藏著多麼美的事物。