

# 以史為鑑：從數學看人類的進步軌跡

洪萬生

台灣師範大學數學系

書名：從數學看人類進步的軌跡

作者：小島寬之

中譯者：鄭宇淳 / 審定：李恭晴

出版社：台北：世貿出版社

出版年：2007

出版資料：平裝共 239 頁，定價 240 元

國際書碼：ISBN-13 978-957-776-825-4

ISBN-10 957-776-825-3

## 一、前言

對一般讀者而言，本書題銜「從數學看人類進步的軌跡」頗為討喜，這是因為很多通俗取向的學者論述，都採取類似的風格與手法。如果我們將數學改成為戰爭或藝術，大概也可以進行有趣的普及書寫。

本書作者小島寬之出身東京大學數學系與經濟研究所，專長應該是與數學十分相關的環境商務。身為經濟學者，他對數學知識的學習與普及活動相當關心與投入，無怪乎他曾著有《從零學習微積分》、《從零學習線性代數》、《神秘的算術》以及《完美的算術》等等。筆者猜測他的數學普及志趣或可追溯年少閱讀經驗，當然也不無可能出自他的跨領域需求：向經濟學同行說明數學知識如何有趣與有用！

## 二、內容簡介

本書內容共分四章，依序為：

1. 從人類五根手指開始的壯盛詩篇
2. 從分數開始，與不確定性奮戰
3. 從無理數開始，進入絢爛的現實世界
4. 從虛數開始，進入不可思議的微觀世界

顯然，這是按照自然數、分數、無理數以及虛數等數目及其意義所進行的分篇論述。不過，其論述重點都擺在數學知識的有用方面。

在本書第 1 章中，作者主要介紹十進位制、八進位制和二進位制、質數與電腦編碼（如 RSA 加密法）等主題，其各節之目錄如下：

1. 十進位法的束縛
2. E.T.使用八進位法？

3. 電腦與惡魔的頭腦
4. 質數是數字中的寶石
5. 質數和電腦
6. 江戶時代的年齡猜謎
7. 數理編碼的時代
8. RSA 編碼的機關

至於引進之手法，都是利用一些有趣的歷史上發生的人、事、地、物，譬如介紹十進位時，以天才數學家或物理學家的軼事為例；介紹八進位制時，以電影 ET 主角的八個手指為例；介紹質數時，以阿雷西波天文台發色的訊息為例；至於介紹餘數時，就以江戶時代的年齡猜謎題（出自吉田光由的《塵劫記》）為例，作者甚至還提供一個相當風行的「占卜」問題：

現在來占卜你的運勢吧！首先，在一張紙上寫上你西元的出生年，接著，再加上你喜歡的兩位數字，再來，把這四位數字的四個數加起來，再用本來的四個數去減。把算出來的數字加上曾經和你接吻過的異性人數，之後，再把這個數的四位數合計，最後請告我這個數字是多少？

本書第 2 章主題是分數，作者相當強調它在處理「不確定性」問題方面的作用：「分數在這種全新的觀點—不確定的控制、機率—對現代社會相當重要的技術領域上，也發揮了相當功能」。所以，如作者所說：「本章介紹人類如何使用分數來對抗社會風險、解開微觀世界的謎題」。或許正因為如此，作者還是非常重視分數的學習問題，請參考本章各節目錄如下：

1. 分數很難嗎？
2. 分數的加法為什麼不夠自然？
3. 用相除法來求最大公因數
4. 0.4 能用二進位來表示嗎？
5. 解決「分數＝比例」不確定性的關鍵
6. 機率彰顯出微觀世界的不可思議
7. 新聞主播的謬論
8. 「火星有生物的機率」無限趨近於 1？
9. 賭徒梅雷和天才帕斯卡的相逢
10. 條件機率是很主觀的
11. 貝斯牧師導出的反機率

在前三節中，作者專門針對小學的分數學習，提出一些澄清。第 4 節的內容相當獨特，作者說明了  $\frac{2}{5}$  在十進位小數表徵中為有限小數 0.4，然而，在二進位小數表徵中，它卻成為無限循環小數 0.01100110....

第 2 章第 5-11 節內容都與機率有關。由於這些都涉及分數，所以，作者認為「分數拿來表現『可能性』是再適合不過的。所謂的『可能性』，就是佔了全體的一種『比例』。以日常生活來說，可以想成『佔了全體的份量』、『影響力的大小』、『佔了幾成』。所以，要同時表達『分割』和『比例』的話，用分數是最

適合不過的。」在這幾節中，作者以一般人常識中似是而非或者深感好奇的例子，說明獨立事件、條件機率，乃至於反機率的意義。

本書第 3 章的主題是無理數，作者認為「平方根在各式各樣的領域都當作技術使用，也是隨處可見的數字。甚至，尤拉常數  $e$  已經是現代社會不可缺少的工具。不只在自然科學上，在金融技術上也成為重要的道具。」為了說明作者如何「從無理數開始，進入絢爛的現實世界」，我們引述本章各節目錄如下：

1. 平方根具有潛在的美
2. 用繩子、紙杯和鐘擺來作平方根
3. 最適當的存款和平方根
4. 怎樣邁步都前進不了的醉漢走路
5. 挑戰難題「Zeta」的尤拉之奮鬥
6. 尤拉數和利息計算
7. 聯誼的成功機率
8. 被碼踢死的士兵的故事
9. 潛藏於誤差的美妙函數
10. 10. 股價進行布朗運動？
11. 侏羅紀公園的混沌理論
12. 產生舞毒娥的機制
13. 混沌和隨機走路
14. 無理數掌控了混沌

在第 1-4 節中，作者點出平方根的「美」與「善」（對於數學知識而言，真當然不在話下了）。第 1 節一開始，他先指出黃金比例與平方根（ $\sqrt{5}$ ）的關係，並且提及他有「從事美術之路的老友，總是帶了用鐵絲作的黃金比例長方形框架到處走動，他用這個東西來決定繪圖的構圖。」再來，作者說明黃金比例長方形（有人稱之為黃金矩形）的內涵（譬如如何從此一圖形再剪出相似圖形）時，作者呼應了第 2 章第 3 節所提及的輾轉相除法。現在，由於輾轉相「剪」沒辦法結束（這種長方形兩邊比為無理數，亦即不可公度量 *incommensurable*），「所以，黃金比例這東西從定義開始就必定是無理數了。黃金比例的美就某方面來說就是『無限重複的美』，這就是平方根存在的意義。」

在第 2 節中，作者利用繩子、紙杯自製鐘擺，說明平方根就在我們的生活周遭。第 3 節說明最適當存款次數與平方根之關係： $\sqrt{\frac{Ti}{2b}}$ ，其中  $T$  是一年間領出

錢的總額， $b$  是領一次錢付給銀行的手續費， $i$  是一年間銀行利息。至於在第 4 節中，作者則企圖布朗運動的簡單案例如「隨機走動」(random walk)，說明它與醉漢走路乃至於經濟活動的連結。第 5 節主要介紹黎曼  $\zeta$ -函數，由於早在 18 世紀，尤拉即已經對於其中的  $\zeta = 1/1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 \dots$  之總和發生興趣，

後來，他發現了令人驚奇的等式： $\zeta = \frac{\pi^2}{6}$ ，也因此與本章主題（平方根）有關。

第 6、7 節主要論及尤拉數  $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$  的應用，其中前者說明利息

之計算和涉及尤拉數  $e$ ，至於則以機率有趣案例中的「相遇問題」，來說明尤拉數倒數  $\frac{1}{e} = e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots$  的用途，其實這些都出自現在微積分課本中的

指數函數  $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ （分別帶入  $x=1$  或  $-1$ ）。

第 8、9 節分別以卜瓦松分布 (Poisson distribution)、高斯或常態分布 (Gaussian distribution, normal distribution) 為題，說明機率的用途，而這兩者當然都涉及尤拉數或指數函數。其中，作者還特別指出這種高斯分布函數「竟然被  $e$  和  $\pi$  所掌控」。至於在第 10 節，作者則是企圖說明「隨機走動的結果其實就是呈常態分布的函數」，從而連結到「股價進行布朗運動」的假說上。

第 11-14 節的主題為混沌。由於作者認為「無理數掌控的混沌」，所以，他才會將 11-13 節的內容歸結到無理數的應用之中。在第 11 節中，作者運用科幻小說與電影情節，來說明混沌理論 (chaos theory) 的意義。為了說明混沌的數學原理，他還以所謂的「□麵變換」為例，表現其中所涉及的迭代 (iteration) 法則。第 12 節主要探討「支配生命現象根幹的混沌」。在第 13 節中，作者則是企圖利用花粉的隨機運動為例，說明混沌都是有關決定論所產生的「不確定」現象和「無法區別」的現象。最後，總結這四節的無理數，就是所謂的「正規數」，它是迭代變換所具有的混沌。這種正規數都是無理數，「所以，無理數構成了我們世界中的各樣機制，我們是沒辦法無視無理數而活下去的。」

本書第 4 章主題為虛數。請先看各節目錄：

1. 虛數在數學處於短兵相接的時代誕生
2. 現實中需要的虛構之物
3. 使用回轉擴大讓複數可視化
4. 解方程式就是畫正多邊形
5. 高斯名流青史的大發現
6. 費馬大定理衍生的數字理想國
7. 微觀物質的不可思議飛舞
8. 微觀世界的機率用複數來記述
9. 量子電腦是夢中的科技
10. 量子電腦能破解 RSA 編碼

在第 1、2 節中，作者轉述虛數誕生的故事，也說明虛數如何與現實的需要（如數目相乘的便捷計算）相關。至於與方程式論有關的部份，則留到到第 4、5 節進一步說明，其中更是連結到尺規作圖的相關理論上。在第 3 節中，作者企圖說明：如果複變函數  $w = f(z)$  視為  $z$ -平面與  $w$ -平面之間的一個映射 (mapping) 時，則複數及其運算當然就視覺化了。至於第 6 節的主要目的，則顯然有意指出：虛數引進之後，數學家庫馬 (Kummer) 所創造出來的數字理想國 (Republic of Number) 之新成員如理想數 (ideal) 等，是費馬最後定理最終證明的不可缺少工具。

本章第 7、8 節主題為複數與量子力學，其中說明薛丁格如何利用複數將波爾的光之波動二重性數學化，於是，「微觀世界的運動就用複數來加以記述，複數這種虛構數字，終於在現實世界中擁有其真實性」。至於第 9、10 節主題則是量子電腦，也一樣應用到複數的概念。

### 三、評論

本書作者小島寬之受過數學專業訓練，對於數系之發展及其相關之應用，也相當熟悉，因此，他才有能力通過自然數、分數、無理數乃至於虛數這幾個按時間順序發展出來的數目 (number) 之歷史故事，來烘托出人類文明的進步軌跡。由於他的專業為數理經濟，又廣泛接觸科普作品 (含小說與電影)，因此，他每每能就近取譬 (本書例子大都十分有趣)，讓本書內容更加平易近人。

儘管如此，作者還是企圖引進一些相當風雅的數學知識面向，譬如高斯的正十七邊形尺規作圖，以及費馬最後定理等等，都涉及非常深刻的數學理論，不是一般視數學為工具者所能想像。在書寫方法上，作者在敘事、說理與評論等三方面，努力地求取適度的平衡，還有，本書圖表除了極少數例外，都極有助於內容的解說。此外，在章節內容的安排順序上，也充分滿足前後呼應、首尾一貫的書寫要求，足見作者擁有深入淺出的科普寫作功力。

不過，作者為了普及的考量，在本書中主要運用了極簡單的數目概念，再利用例題 (或例子) 引進與這些概念相關的數學 (或數理經濟) 理論，其中難易度之拿捏，始終是他的普及書寫之挑戰。顯然為了力求內容之精簡，本書中有不少的抽象理論如機率分布、布朗運動、量子力學以及量子電腦等等，難免語焉不詳，這是值得改進之處，儘管作者已經進了最大努力了。

最後，針對中譯，我們必須指出有幾個缺失。首先，本書第 68 頁的 Cardano 就是第 181 頁所譯的卡爾達諾。不過，在後者的註解中，卡爾達諾的英文名字拼法竟然成為 Kaerdanuo，這當然由於日文拼音所誤。此外，同頁中還有費拉理的英文名字 Feilali 也顯然由日文拼音所「還原」，其實，正確的拼法應該是 Ferrari 才是。再有，第 232 頁的一九四四年應該是一九九四年之誤。

總之，本書之書寫值得仿效，有志之士不妨從作者所選擇的各章各節之標題深入思考，如此，或許就可以體會作者的苦心造詣了。

## 優秀數學科普作品的指標（暫訂）

### Indicators for good popular mathematics books (tentative)

#### 1. 知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)

- (1) 認識論面向 (Epistemological aspect) : ★★★
- (2) 歷史或演化面向 (Historical or evolutionary aspect) : ★★
- (3) 哲學面向 (Philosophical aspect) : ★★
- (4) 教育改革面向 (Education reform aspect) : ★★

#### 2. 形式或表達 (Form or representation)

- (1) 創新手法 (Innovative approach: new story on old stuffs) : ★★
- (2) 數學知識的洞察力 (Insight into mathematical knowledge: inspiring and revealing) : ★★★
- (3) 忠實可靠的參考文獻 (Integrity with references) : ★★★★★
- (4) 敘事的趣味性、可及性與一貫性 (Narrative in an interesting, accessible and coherent way) : ★★★

#### 3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form) : 針對下列三個年齡層閱讀大眾，考量（知識活動）內容與形式（包裝）的不同平衡點。

- (1) 兒童層次 (for kids) ★
- (2) 青少年層次 (for adolescence) ★★
- (3) 一般社會大眾 (for general public) ★★

#### 4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage) :

分數麻煩的地方只需用一句話來說：因為它擁有一層涵義。

首先，分數表現了除法：分數  $3/4$  代表  $3 \div 4$  這件事。 $36 \div 4$  可以立刻用整數範圍中的 9 來回答，所以， $36/4$  的分數就沒有存在的必要； $3 \div 4$  沒有整數範圍中的答案，所以，就使用  $3/4$  這樣新穎的表記方法來作答。

但是，另一方面，分數  $3/4$  也表示集合三個「四等分」的單位意義。

$3/4$  同時也代表  $3:4$  這樣的比例；代表以某基準測量出來的一方為 3，另一方為 4，這樣相互「比較」涵義的數字。

在日常生活中，我們每個涵義都在使用。當我們說「四分之三公尺」的時候，代表的是 75 公分這樣一個量。另外，孩子們在分麵包時，分成四等分之後，其中三份被大一點的孩子拿走時，我們透過分數可瞭解人生嚴苛的一面。而提到「全體國民的四分之三都是贊成的」時候，我們能在無法想像的眾多人口中延伸自己想像的翅膀。分數的三層涵義雖然就像這樣便利，但也因此讓學習者陷入混亂。

(pp. 50-51)

許多人在學校學到平方根時，也許都曾忿忿不平地想：平方根會在日常生活有什麼用處？但實際上，平方根的確就存在我們的生活周遭，我們不可能過著沒有平方根的生活，平方根存在於四周各式各樣的工具或技術裡，改善了我們的生活。也許有的人會覺得我太誇張了，但是讀完本書，您一定會發現，數學和數字的确讓我們的生活更加便利。

數學和數字就這樣深深地滲透到我們的日常生活中，讓社會進步，並且不斷地自我進化。(p. 9)

遠從畢達哥拉斯時代開始就不斷被抵制的無理數，不知不覺間竟然在我們生活的世界得到公民權了。明明就是要記述實數，卻不能沒有虛數。就好比缺少了靈魂的存在，就沒辦法說清楚世間萬物一般。

用大膽一點的比喻來說，這就好像是「述說現實必須要用虛構之物」。但是，這卻一點也不令人感覺不可思議。現實如此鮮明，現實是如此充滿實在感。但是，要正確掌握現實，我們會利用一些虛構的東西。就像是我們在小說或電影等人造的產物中看出現實的本質。

光是用看的或是用體驗的所無法瞭解的現實，我們就利用虛構理解其真實面貌。接受虛數這種虛構的世界，才能更貼近實數的本質。(pp. 185-186)