正 5、6、15 邊形之尺規作圖

洪萬生
台灣師範大學數學系

一、前言

有關正三角形、正方形的尺規作圖，我們在〈**尺規作圖：從三角形到正方形**〉（參見本欄）一文中已經討論過了。在該文中，我們主要著眼於直觀 vs. 論證之對比。對於百分之八十的中學生而言，尺規作圖教學的確是太沈重了一些，因此，「作圖」只要直觀解說即可。然而，對於比較優秀的學生（甚至那些將來可能成爲中小學教師者）而言，這種學習活動所需要的解析 vs. 綜合之能力，實在是數學經驗的極珍貴部分，非常值得納入中學數學教材內容，或者中小學數學教師的訓練教材之中。

至於有關正 5、6、15 邊形之作圖，我們也提及出處：《幾何原本》第 IV 冊。現在，就讓我們介紹第 IV 冊的相關內容。在本冊中，正 5 邊形作圖列爲命題 11，不過，其「進路」(approach) 則是將此一正 5 邊形內接到一個已知圓內。還有，他的證明關鍵在於本冊命題 10：求作一個等腰三角形，其底角為頂角之兩倍 (*To construct an isosceles triangle having each of the angles at the base double the remaining one.*) 當然，此一等腰三角形的作圖，還是藉助於「外接圓」。[1]可見，歐幾里得充分地使用了外接圓這一個非常強而有力的概念工具，這對於我們從「系統觀」來理解《幾何原本》的知識結構，相當具有啓發性！

請注意，正如我們在〈**尺規作圖：從三角形到正方形**〉所提及，底下引文中的 IV. 10 代表《幾何原本》第 IV 冊第 10 命題，其餘類推。此外，如果要想在《幾何原本》的脈絡中嚴格證明正 5 邊形的尺規作圖，那麼，所需之命題最少 40 個，無怪乎此一作圖「被迫」安排到命題 IV. 11，顯然沒有外接圓的概念工具是成不了事的。

二、正 5 邊形之尺規作圖

Proposition 11: *To inscribe an equilateral and equiangular pentagon in a given circle.*

Let *ABCDE* be the given circle. It is required to inscribe an equilateral and equiangular pentagon in the circle *ABCDE.*

Set out the isosceles triangle *FGH* having each of the angles at *G* and *H* double the angle at *F*. Inscribe in the circle *ABCDE* the triangle *ACD* equiangular with the triangle *FGH*, so that the angles *CAD, ACD,* and *CDA* equal the angles at *F, G,* and *H* respectively. Therefore each of the angles *ACD* and *CDA* is also double the angle *CAD.* **(IV. 10, IV. 2)**

Now bisect the angles *ACD* and *CDA* respectively by the straight lines *CE* and *DB,* and join *AB, BC, DE,* and *EA.* **(I. 9)**

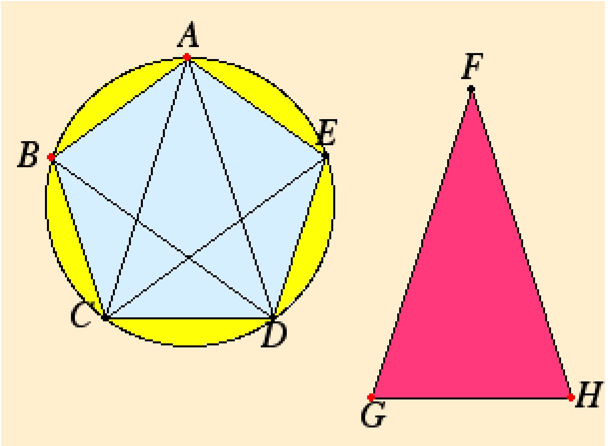
Then, since each of the angles *ACD* and *CDA* is double the angle *CAD,* and they are bisected by the straight lines *CE* and *DB,* therefore the five angles *DAC, ACE,*

[1] 正 5 邊形作圖需要利用外接圓，這是一個相對於正 3、4 邊形作圖的極大差異，何以致此，值得深思。

ECD, *CDB*, and *BDA* equal one another.

But equal angles stand on equal circumferences, therefore the five circumferences *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, and *EA* equal one another. **(III. 26)**

But straight lines that cut off equal circumferences are equal, therefore the five straight lines *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, and *EA* equal one another. Therefore the pentagon *ABCDE* is equilateral. **(III. 29)**



I say next that it is also equiangular.

For, since the circumference *AB* equals the circumference *DE*, add *BCD* to each, therefore the whole circumference *ABCD* equals the whole circumference *EDCB.*

And the angle *AED* stands on the circumference *ABCD*, and the angle *BAE* on the circumference *EDCB*, therefore the angle *BAE* also equals the angle *AED.* **(III. 27)**

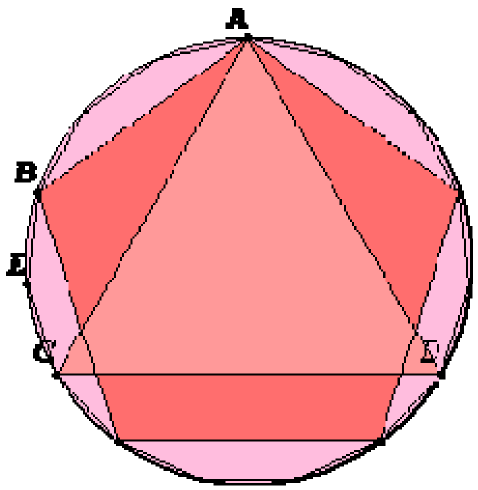
For the same reason each of the angles *ABC*, *BCD*, and *CDE* also equals each of the angles *BAE* and *AED*, therefore the pentagon *ABCDE* is equiangular.

But it was also proved equilateral, therefore an equilateral and equiangular pentagon has been inscribed in the given circle. **Q. E. F.**

同理，歐幾里得針對正 6 邊形、正 15 邊形的尺規作圖時，也是將它們內接到已知圓內，請分別參見 David Joyce: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce 命題 IV. 15，16。

三、正 15 邊形作圖

有關命題 IV. 16 證明，其關鍵在於如下圖，正三角形 AC 邊所對應的外接圓之 AC 弧如何五等分的問題。現在，既然正 5 邊形已經可以作圖，那麼，這個正 5 邊形的一邊 AB 所對應的 AB 弧，就佔了外接圓圓周的 1/5。由於 AC 弧佔了同一個外接圓圓周的 1/3，所以，BC 弧 ＝ (1/3)圓周 － (1/5)圓周 ＝ (2/15)圓周，於是，如果我們將 BC 弧二等分，得 BE、EC 弧，那麼，BE、EC 邊就是正 15 邊形的邊了。



David Joyce 注意到：若 m, n 互質，我們就可以仿此一命題，利用正 m 邊形、正 n 邊形，為正 mn 邊形進行尺規作圖。

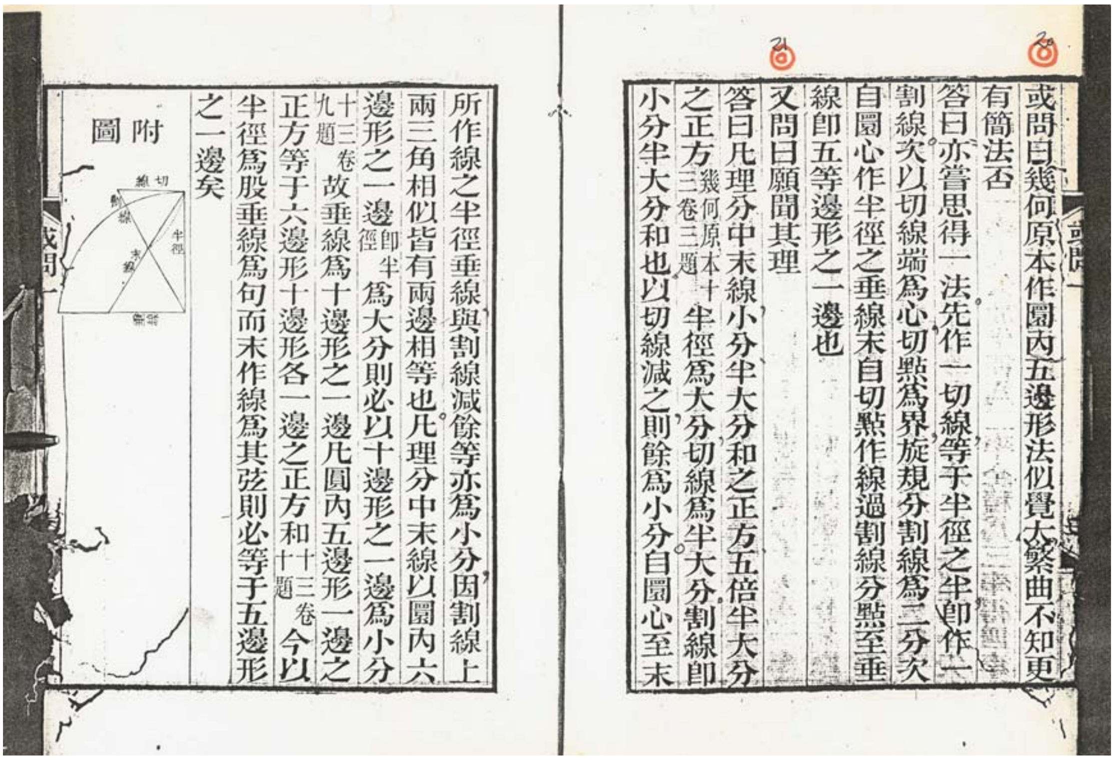
針對尺規作圖可能性，《幾何原本》到第 IV 冊爲止，總共作出了正 3 邊形、正 4 邊形、正 5 邊形、正 6 邊形以及正 15 邊形。如果再應用命題 III.30（亦即將一個圓弧二等分），我們可以馬上得到下列圖形之尺規作圖：正 8、10、12、16、20、24、30 邊形等等。

然則其他的正 n 邊形如 n = 7, 9, 11, 13, 17, 18, 19 又如何呢？現在，該輪到偉大數學家高斯 (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855) 上場了。他在十九歲時，證明了正 17 邊形可以尺規作圖，而在數學史上奠立了不朽的功績。請大家先參考本欄陳彩鳳老師所撰寫的〈高斯 Johann Carl Friedrich Gauss〉。

五、李善蘭的正 5 邊形作圖

最後，我們順便介紹中國數學家李善蘭 (1811-1882) 所提供的一個正 5 邊形的作圖，茲將此一文本掃瞄如下，請大家參考解讀。請注意：李善蘭的作圖及證明，主要依賴《幾何原本》命題 XIII. 3，9，10（在此，他分別稱爲第十三卷三題、九題和十題）。由於李善蘭協同英國傳教士偉烈亞力 (Alexander Wylie) 合譯《幾何原本》後九卷（他們所根據的英國版本，都收入兩卷），可見他相當熟悉此一經典之內容，而且還有能力應用以證明正 5 邊形之作圖，實在相當難能可貴。我們相當期待讀者可以自行將它「翻譯」成現代證明，以便更深刻欣賞他的創意！

還有，也請注意：這是相當典型的「解題活動」，因爲李善蘭利用了《幾何原本》後面的命題（第 XIII 冊），來證明前面的命題（第 IV 冊），而不是像歐幾里得一樣，想要建立一個數學結構。不過，其中似乎並沒有出現邏輯循環 (logical circularity) 的問題，請大家自行檢視。



或問曰幾何原本作圜內五邊形法似覺太繁曲不知更有簡法否
答曰亦嘗思得一法先作一切線等于半徑之半即作一割線次以切線端爲心切點爲界旋規分割線爲二分次自圜心作半徑之垂線末自切點作線過割線分點至垂線即五等邊形之一邊也
又問曰願聞其理
答曰凡理分中末線小分半大分和之正方五倍半大分之正方（幾何原本十三卷三題）半徑爲大分切線爲半大分割線即小分半大分和也以切線減之則餘爲小分自圜心至末所作線之半徑垂線與割線減餘等亦爲小分因割線上兩三角相似皆有兩邊相等也凡理分中末線以圜內六邊形之一邊（即半徑）爲大分則必以十邊形之一邊爲小分（十三卷九題）故垂線爲十邊形之一邊凡圜內五邊形一邊之正方等于六邊形十邊形各一邊之正方和（十三卷十題）今以半徑爲股垂線爲句而末作線爲其弦則必等于五邊形之一邊矣

附圖

李善蘭正 5 邊形作圖及證明 (1867)

參考文獻

Heath, Thomas L. (1956). *Thirteen Books of Euclid's Elements*. New York: Dover Publications, INC.

Joyce, David: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce.

李善蘭 (1867).《天算或問》，收入李善蘭，《則古昔齋算學》。