他山之石：國際間數學教育改革的趨勢與展望

洪萬生 臺灣師大數學系

一、前言

接到這個演講邀請的時候，我一直考慮要說些什麼呢。剛好，台大數學系陳宜良教授做了一個「中小學數學科課程綱要評估與發展研究」，其中涉及了跨國的比較研究，比如說台灣跟美國加州、台灣跟新加坡、中國、南韓、日本，還有台灣跟英國。而這當然是中央大學單維彰教授所帶領的幾個研究生所做的，一些蠻初步、但很有用的一些報告。這是我今天演講大綱的第一部份：

- 課程改革：《中小學數學科課程綱要評估與發展研究》（研究主持人: 陳宜良；研究員: 單維彰、洪萬生、袁媛；研究助理: 魏士傑、舒宇宸、姜志遠、翁婉珣、黃子倩、洪雅齡）
- 教學問題舉例：學習迷思；上課場景（預料之外的討論）
- 教材與課程之反思：圓面積公式教材怎麼安排？驢橋定理，以及加州課程標準
- 教師教育：*Mathematical Education of Teachers* (Why the adjective “mathematical”?)
- 結論：新舊之間如何折衷？

這份報告所以能夠完成，完全基於這六個比較研究。其中，我們台灣的參照標準是九年一貫正綱，至於高中則是以 95 暫綱爲主。整體看來，如就細緻的單元作比較，這幾國的課綱並沒有太大的出入，譬如以圓錐曲線爲例，我們的高中課綱還當成一個主題，但有一些國家（比如說南韓）就已經拿掉這個單元了。所以，作這個比較之後，至少會讓很多人鬆一口氣，原來這個課程改革沒有什麼大不了。不過，有一個重點值得凸顯，那就是，大家都忽然發現函數單元的重大意義，這當然可能跟「建模」(mathematical modeling) 成爲熱門的學習主題有關。

在本演講的第二個部份，我打算舉幾個教學實例，來跟各位交換心得。第三部份，我打算提供一些有關教材和課程的反思，這裡將就三個例子來談：一個是圓面積公式，一個是所謂的「驢橋定理」，以及有關美國加州課程架構的評論。最後一部份，當然是教師教育問題，我們將特別推薦美國 MAA 所出版的 *Mathematical Education of Teachers*。他山之石，可以攻錯，在數學教育改革惹起十方塵埃之時，或許它也是一面明鏡吧。

二 課程改革：《中小學數學科課程綱要評估與發展研究》

有關這一主題，我剛剛提及單維彰教授做了一些實質貢獻（我掛名只是陪榜而已）。這個報告裡面有一個整體的建議，茲引述如下：

- 確立語文與數學為中小學教育的核心科目，並訂出最低授課時數：建議可仿照美國(加州)、英國與新加坡，在 1~9 年級數學教學節數改為每天一節。
- 數學課程綱要應將『數學』作為核心科目對待。

- 設置「常設委員會」評估課程結構及相關實施問題：長期監控數學教育實施狀況與問題、進行跨國比較、綱要一貫性與銜接性之分析、研究各級招生相關問題及師資培育問題，並提出前瞻性建議，以作為數學科教育政策制訂之依據。
- 建議廣泛實施選修制度：1. 建議自高中起應將學校教育導向為以學生為本位的學習模式；2. 建議自高二起，以選修代替分流。
- 訂定高中起使用科技工具的政策：透過科學計算器的使用，增進學習效率，並配合數學建模之學習，促進數學與科學的整合，以便讓數學學習與現實世界掛鉤。

顯然，我們希望確立語文跟數學作爲核心科目，這一點當然有些人不會完全贊成，不過，我想這個可以而且溝通。或許我們可以仿照美國加州的課程架構，還有英國、新加坡一到九年級的時候數學教學節數，每天一節，那語文大概一樣，也就是說，每天都有一節數學，一節語文。這是希望大家把語文跟數學當成重要的學習工具，因爲每一個現代公民社會最重要的溝通工具，一個是語言，一個是數學，當然還可以包括有資訊。

我們也期待教育部能夠設置一個「常設委員會」。這個委員會的功能，就是長期監控數學教育的實施狀況與問題，進行跨國比較綱要、一貫性與銜接性的分析等等。一旦有了這個常設委員會，就可以做很好的諮詢，譬如當高中課程架構要修訂的時候，同時能觀照到國中與國小，其他方面也一樣。還有，在選修制度方面，我們建議從高二開始以選修代替分流，另一方面，當然是剛剛提過科技工具使用的相關政策等等，。

至於有關十二年一貫的課程問題，我們的建議如下：

- 比較各國的狀況，數學必修大致到十年級為止。我國數學必修則只到十一年級為止，導致許多打算主修文法商學生在高中階段的數學課程份量過重。建議現行高一、二的題材再做適當的調整。茲分述如下：
  1. 內容主題：數與量、代數、幾何、機率與統計、函數、數學分析。
  2. 能力主軸：演算能力、抽象化能力、推理能力、連結能力、解題能力、溝通能力、使用科技工具能力。

剛剛黃榮村部長建議我們不要叫「十二年一貫」，因爲九年一貫似乎已經被「污名化」了，所以，不要叫「十二年一貫」。如果大家對這個名稱很敏感，那就把它拿掉好了，反正就是十二年課程架構一個整體的看法。如跟那幾個國家的比較來講，他們的數學課程大部分都是修到十年級爲主，我們則修到十一年級。所以，其實我們多學了一些東西。有關內容主題方面比較重要的是，我們建議把函數這個單元，特別從代數的主題裡面把它獨立出來，我想這是呼應我剛剛的說明。

現在，或許我們也追溯一下數學教育史上的一個有關函數的重要插曲。1905 年，愛因斯坦在物理學締造了不朽的貢獻，因此，今年 (2005) 物理年全世界都在慶祝愛因斯坦狹義相對論一百週年。其實，我們也應該紀念德國偉大數學家克萊恩 (Felix Klein)，因爲在 1905 年的時候，他提出「中學數學教學要目」：

- 教材的選擇與安排，必須適應學生心裡的自然展。
- 融合數學的各個分支，並與其他學科加強關係。
- 不過分強調形式的訓練，實用方面也應列為重點，以便充分發展學生對自然界和人類社會諸現象能夠盡興學觀察的能力。

- 為達此目的，應將養成「函數思想」和「空間觀察」等能力作為教學的基礎。

其中，他顯然特別突顯函數，特別強調建模的觀念。此外，他也認爲教材的選擇，要適應學生的心理發展，所以，我們應該融合數學的各個分支，並且跟其他的學科加強關係，不要過分強調形式的訓練。還有，實用的方面也很重要，務必充分發展學生對自然界跟人類、社會很多現象，做數學式的觀察。爲了達到這個目的，應該把函數的思考跟空間的觀察能力，當作教學的基礎。

我們再回頭來看一下我們的「評估研究」對於「函數」的一貫主張：

- 函數可以從代數主題中抽離，另立為一主軸。
- 函數是用來表徵量與量的關係，和現實世界適當結合，高中的三角函數、指對數函數都不適合放在代數主題中。
- 由函數的主軸來看，高中數學中多項式的最高公因式、最小公倍式及輾轉相除法，就不是學多項式函數的重點，這部分題材也不在其他國家的綱要中出現。
- 又以三角函數為例，它的重點應是作為週期函數的意涵，學生要知道振幅、週期、幅角的概念。這部分我們較少強調。
- 相對地來說，我們傳統上比較強調三角恆等式，如「和差化積」,「積化和差」的公式。這和其他國家正好相反。
- 又如指對數函數，如 C14 衰變、人口成長等，在其他國家被強調，而我國綱要卻未提及。如由函數表徵現實世界的一貫性精神來看，高中綱要理應增加這一方面的說明。

它特別強調函數應該從代數主題把它抽離，另立爲一個主軸，並強調函數用來表徵量跟量的關係，和現實世界適當的結合等等。從函數主軸來看，高中數學裡面的最高公因式、最小公倍式，與輾轉相除法等等，都不是多項式的學習重點。請特別注意，這部份的題材不在其他國家的綱要出現，大家很在乎的也許是中國、南韓等國的情況。此外，傳統上我們比較強調這種三角恆等式，這個部份其他國家並不重視。其實，最重要是有關函數這個應用方面，我們安排的內容比較弱一點。我們從七年級開始介紹變數，以至二元一次方程，這些內容都在一個年級完成。根據我們的報告，我們主張時間應該稍微拉長一點，一個年級的教學時間太短、太緊湊，如此一來，函數的操作及應用，我們做得太少。大家看一下有關函數應用的部份，加州課綱在代數 II「指數函數」單元裡面提及，用指數函數解決乘指數成長與衰退的問題等等。另外，中國在這方面當然也很重視，因爲他們一向是蠻重視實用的，所以，我們不妨參考。總之，我們的綱要應該增加函數應用的一些材料。

三、教學問題舉例：學習迷思；上課場景；實習教師心得

數學教育的現場有許多問題，我們必須誠懇面對。現在，我特別舉幾個例子，以便說明這些問題的意義。首先，這是一位國一學生第一次段考之後，所寫的學習札記：

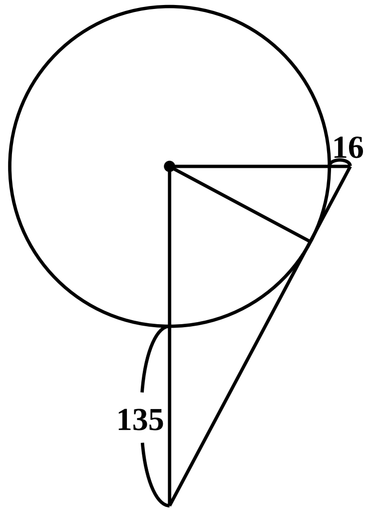
> 我每天都幾乎有一節數學，我每天都在看黑板，老師寫的，自己慢慢的看，算法怎麼算，所以每天幾乎都可以理解了幾題。

假如我有一個題目不懂，就去問□□□（按：略去名字）怎麼作，他糾正我的寫法，我也慢慢的懂了。

我對數學有困難的是，不能容忍 x, y, z 是個數字，並算出一個答案，這是自己面林〔臨〕到的一個困難，無法途〔突〕破！

針對「我對數學困難是不能容忍 x, y, z 是個數字，並算出個答案，這是自己面臨到的困難，無法突破」，我常問我的學生說，如果你的學生有這種迷思的話，那你要怎麼辦？這一類的迷思到處都有。

接下來，我講一點數學史的東西，賣一點「老本行」－中國數學史。中國金、元時期數學家李冶的《測圓海鏡》裡面有一個題目：



假令有圓城一所，不知周徑，或問丙出南門直行一百三十五步而立，甲出東門直行一十六步見之，問徑幾何？

它的「草曰」給出了列方程式的過程，其中「立天元一爲半城徑」，就像今天代數設 X 是圓城的半徑。本題的意思是有一所圓形的城（中國早期的城是正方形，後來變換成爲圓形），有一個人某甲從東邊那個門出去走十六步，另有一個人某丙從南邊那個門出去一百三十五步，甲丙剛好可以互相看到（三點共線），所以，這剛好是一個直角三角形，它的斜邊跟這個圓相切。如果把這個切點跟圓心連起來，剛好是半徑，那麼，這個半徑乘上這個斜邊，會等於兩個股的乘積。顯然，李冶利用這個公式來列方程式，其中他也利用到畢氏定理，不過，今天我不去講這個細節。

現在，我們來看明朝的數學家之評論：

藝士著書，往往以秘其機為奇。所謂立天元一云爾，如積求之云爾，漫不省其為何語。（唐順之）

細考《測圓海鏡》，如求城徑即以二百四十為天元，半徑則以一百二十為天元。既知其數，何用算為？（顧應祥《《測圓海鏡》分類釋術》

這兩位都是明朝具有代表性的數學家，所以，他們的反應，被認爲見證了明朝數學的沒落。這兩個人很倒楣，常被舉例當成反面教材，表示明朝數學有多差！這裡所謂「立天元一」，就是令 X 等於什麼東西，唐順之完全無法理解；其次，「如積求之」，就是說根據題目的意思，得到一個式子放左邊，根據題目另外其他意思，再列一個式子放右邊，讓兩個相等，所以，英文 “equation” 的意思，是來自 “equate” 是個及物動詞，「令相等」，「如積相求」的意思，就是方程式兩邊同樣的積相等求解的意思。另一方面，顧應祥是中國古代官位最高的數學家，做到尚書的職位（相當於現代的部長），他有一本著作叫《測圓海鏡分類釋術》，是研讀《測圓海鏡》的心得。他的評論也相當有趣：既然假設半徑爲天元一（亦即已知），爲什麼還要算呢？各位想想看，他的困惑與上引的那位國一學生究竟有無不同呢？

另一方面，中國晚清有一位數學家華蘅芳 (1833-1902)，自修數學有成。他對天元術的了解，完全反映了他自己的學習經驗：

所求之數，既能以天元代之，則可視之如已知，而將此數入算耳。故能將所立之天元，與題中已知之各數相加減乘除，此天元之數所由立也。天元則是未知之數，無異於已知，則可將已知、未知之各數，依題中曲折以相證，則其所注意者不在未知之數，而專在相等之兩積。（華蘅芳《學算筆談》）

相對地，現代數學教育家花了很多時間，終於才確立算術裡面的「等號」跟代數裡面的「等號」意義不一樣。代數應該專注在等號上面，而不是放在未知數上面，這卻是華蘅芳早已困而學之的心得，由此可見，歷史認識論 (historical epistemology) 有它的價值與意義。

然則一元一次方程式的單元應該怎麼編寫，怎麼教學呢？或許我們可以參考如下面向：

- 數學知識的「認知」vs.「邏輯」兩個面向如何折衷？
- 你（妳）認為老師怎麼教學而導致學生形成此一「迷思」（或「另類」）概念？
- 有很多老師「照本宣科」！你（妳）認為教材的編寫者強調了一元一次方程式單元的哪一個面向？
- 算術解法 vs. 代數解法

這裡，認知跟邏輯如何折衷？教師如何麼教學而導致學生有這種迷思？再者，如果很多老師照本宣科，那麼，為了避免這種迷思，教材的編者應該強調一元一次方程式的哪個面向？此外，我覺得教師在講解一元一次方程式的解法時，應該說明代數解法跟算術解法的不同在哪裡？當國中教師在教一元一次方程式的時候，為什麼不能舉一個算術題目，運用算術方法解一遍，再用代數方法解一遍，如此或可幫助學生理解這兩種解法的思維方向完全不同吧。我覺得在這種地方，教師似乎應該去回憶一下：我們小學時提過哪些問題，這些如用代數來解，跟用算術來解究竟有什麼不同。

緊接著，我們再來觀察一位國中數學實習老師的教學日記：

- 教學單元：一元一次方程式

  (2005 年 3 月 2 日) 如果是平時上課，學生就會吵著要做練習題，但是今天卻沒有，可見大多數的學生對於這個單元都不太了解，我絕[覺]得依原一次方程式對這個年紀的學生真的很難！當年我學到未知數也是花了許久才理解，所以想要趕快學會就必須下苦工夫才行！

- (3 月 9 日) 有些數學問題是我在學習過程中不曾遇到的，所以我比較不知道學生是如何思考的？例如：化簡 $9x+5-8x$ 會得到 $17x+5$ 的答案，這當然是錯的啦！正確答案是 $9x-8x+5 = (9-8)x+5 = x+5$，但是學生卻是這樣子看的：$9x+8x+5 = 17x+5$，原本我說正負號要跟好，意思是 $8x$ 前的負號要一起看成 $-8x$，但是學生卻是看成 $9x+$ 後面的東西，難怪怎麼算都錯！但是我平常事〔示〕範例題的時候都有用不同的顏色的粉筆圈起來一再強調，學生卻還是沒有感覺，問題出在哪裡呢？專心度不夠？學生程度不好？

- 本週與指導老師討論重點

  (1) 103 這個班級學生學習這一個單元的表現太差、許多學生都需要個別指導才行！我和○○○老師安排時間加強指導學生，希望能讓更多人跟上學習進度。

(2) 要求學生徹底了解以符號代表數的真意〔義〕很困難，目前我們的目標是期望學生依照規則將題目做對，例如……

(3) 課本解一元一次方程式用等量公理教學，但是補充的部分是用移項法則，學生的反應普遍都不懂！雖然只不過是省略幾個步驟，就可以更快地解出未知數，可惜學生剛接觸這個單元，就是想讓學生用移項法則〔，這〕似乎太快了，所以教學還是要是〔視〕班級學生程度而定。

這是一份相當詳盡的教學日記，其中，包括了有關學生學習的觀察、教師的反思以及她與實習輔導教師的討論。

緊接著，我們再考察一個國小數學教學的案例。例題如下：

媽媽上菜市場買菜，買肉用去八十五元，買水果花了九十四元，買青菜用去三十五元，請問媽媽總共花了多少錢？

我建議文字用語的部分能夠統一，因爲有些地方用「用去了」，有地方用「花」，這對於語言能力比較差的人，學習效果會有影響。其次，我們比較正確算法與學生算法：

正確寫法：85+94+35=179+35=214

學生算法：85+94=179+35+35=214

顯然，學生的算法是直式計算的翻譯，直式翻譯成橫式。於是，有兩個老師就討論如下：

・對於這個解法，我表示贊同，但□□卻持反對意見。

・□□老師卻認為等號兩邊的值應該是相等的，如用上述橫式計算，等號兩邊的值並不相等（這時就不能用等號），怕造成學生的誤解，且算式的意義也會不同； 而且學生一升上三年級，中年級的老師不一定能接受學生這種算式。

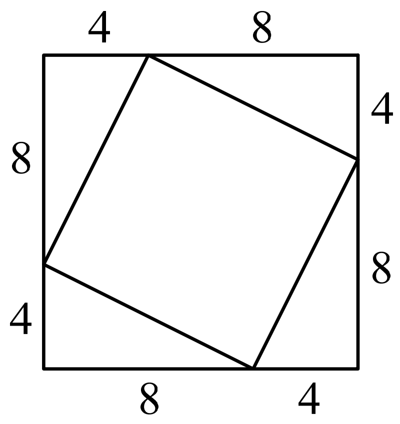
・對於□□老師的說法我無法反駁。我之所以贊成，是因為我把算式當成一種計算過程，學生所寫的這種算法，其實就是我們生活中常使用的方法(也是計算機按 鍵操作的方法)，這種算法的確比數學課本中一步一步的算式要快多了，何況算 法是學生寫出來的，他一定懂算式的意思，因此，我認為不必去規範計算過程的 書寫方式。

・○教授聽完我們各自的解釋後，頓時陷入清官難斷家務事的困境，因教授的專長不是數學領域，且對國小的教學並不熟悉，所以，他建議我們去詢問數學系畢業的老師或中年級老師的看法之後，再予討論。

有關這個案例，我想教師必須瞭解：數學運算與符號的操作必須完全符合常規才行。有些時候，「便宜行事」的結果，往往可能引出一些不必要的迷思概念。我在美國留學時，曾經看過一些小孩數學運算時，等號「＝」永遠不會斷，一路等下去的。所以，我猜測那種小孩大概沒有命題論證的思考能力，完全沒有，他其實只會操作一些運算。

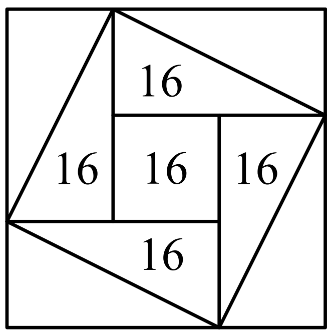
本節最後，我們再舉一個教學案例，說明教師素養的重要性。

這是我從 *Mathematical Education of Teachers* 所摘錄出來的。先看這個「弦圖」：



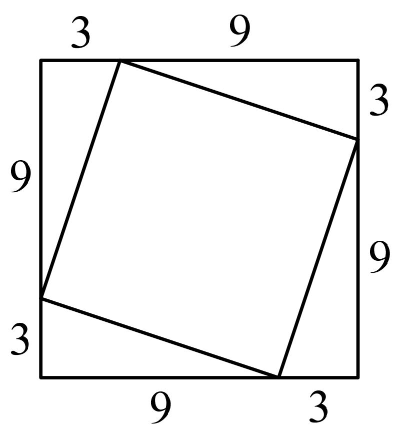
圖一. 弦圖

Liddel 老師原來的教學目標，是希望學生利用畢氏定理，求此內嵌正方形之邊長（爲無理數），從而求得其面積。可是，沒想到學生茱莉利用下圖求得答案（＝80）：



圖二. 弦圖的切割

顯然，茱莉不需利用畢氏定理去求弦長（是無理數），她走了另外一條路線，這個路線是比較基本的方法，因爲畢氏定理是比較進階的方法。緊接著，學生比爾這個傢伙，看起來調皮搗蛋。他得到不同答案，因爲他把每邊改成如下樣子：



圖三. 另一個弦圖

他解釋說：「我得到不同的答案，但是，現在看起來我沒有把圖畫看對（上圖）！我把每一邊分成 3 與 9。」針對這一變化，學生亞麗莎評論說：「有沒有可能無論每邊怎麼分割，面積都會一樣？」於是，Liddell 立即追問說：「妳怎麼想呢？如果這個點從分成 4 與 8 改變成爲其他的分法，那麼，內嵌的正方形面積會保持一樣嗎？」

當學生正在考慮那個問題時，她們的老師必須盡快決定是否繼續她原先的教學計畫－「連結此一問題與無理數」，或者乾脆順著比爾的「答案」與亞麗莎的「問題」，把問題連結到代數乘法公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，然後，要求她的學生去核證這些內嵌的圖形都是正方形，或者利用圖形計算器探索這個「內嵌正方形面積函數」：$y=144-2(x)(12-x)$。教師必須要當下做個判斷，尤其如果你覺得你正在執行某一種教學法時，決定要不要「接招」顯然很重要，當然教學時間是否足夠也是個問題。

四、教材與課程之反思

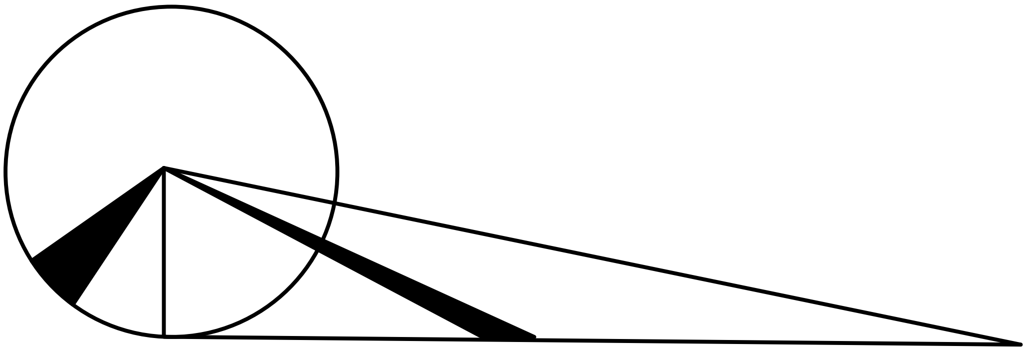
現在，有關教材與課程反思，我將就如下三個主題依序說明之：

- 圓面積公式教材怎麼安排？
- 加州課程標準
- 驢橋定理

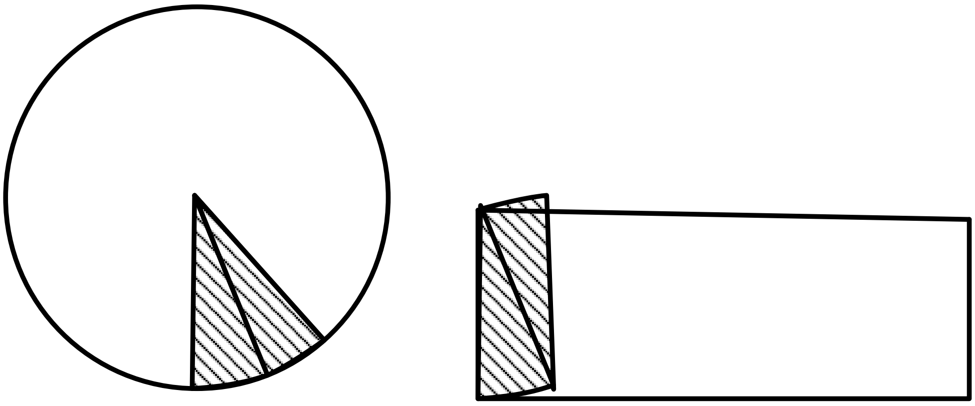
中國古代圓面積計算稱爲「圓田術」，源自漢代《九章算術》的圓面積公式：「今有圓田，周三十步，徑十步，問為田幾何？」也就是說，有一個圓形，它的圓周長等於三十步，直徑是十步的話，那麼圓面積多少？另一個題目是：「又有圓田，周一百八十一步，徑六十步三分步之一，問為田幾何？」本書編者給的圓周與直徑之比都是三比一（亦即相當於取圓周率近似值爲 3）。至於「圓田術」(圓面積公式)，就是「半周半徑相乘得積步」。中國魏晉時期劉徽注「圓田術」時，說：「按半周為從，半徑為廣，故廣從相乘為積步」，就是把半周看成從，半徑看成廣，那麼，由於廣、從是長方形兩邊的稱呼，所以，基本上他把半周半徑看成長方形的兩邊。如此一來，只要我們有辦法把圓形變換成長方形的時候，我就可以證出圓面積公式了。此外，我們也要特別注意，他其實先證明圓面積公式，再根據圓面積公式去求π的近似值，與阿基米德的做法一樣。古希臘阿基米德 (Archimedes, 287?-212 BC) 有一本《圓的測量》(*Measurement of a Circle*)，裡面總共有三個定理：第一個定理，就是證明一個圓的面積等於一個直角三角形的面積，此一直角三角形的兩股之一是半徑，另外一股則是圓周；接著，第二個定理，就證明π介於 3+(10/71) 與 3+(10/70)之間；第三個是證明一個圓的面積跟它直徑所張出來的正方形面積的比。所以，他是證明圓面積公式之後，再去求圓周率近似值的。我們必須承認，他知道直徑比上圓周長是一個常數，不管這個圓多大多小。

然則劉徽跟阿基米德有什麼不同呢？當然，就證明本身而言，一個是直接，一個是間接。劉徽「割圓」時基本上是「割到不可割」，阿基米德則是利用間接迂迴的窮盡法 (the method of exhaustion)。另一方面，刻卜勒 (Johann Kepler) 解讀阿基米德公式其實蠻有意思的，我們看一下他的圖解，他從圓上切一塊比薩（扇形），把它拉過來放在直角三角形上，成爲一個三角形，這兩個面積相等。如果我們把這個比薩切得很細很細的時候，則這些小片的比薩就很接近等腰三角形。這兩個三角形同底等高，面積相等，從而得證

圓面積公式。顯然，基於這種解讀，刻卜勒認爲我們應該可以理解這個圓面積公式爲什麼長這個樣子。



圖四. 圓面積的阿基米德公式：$\frac{1}{2}Cr$ ，提供者：刻卜勒



圖五. 圖示圓面積的九章公式：半周半徑相乘，構思者：劉徽

圖五這個當然是中國人的算法，就是半周半徑，這個是我從一本小學教科書裡面所摘出來的，現在他們應該改編過了，所以其實他用這個方式慢慢切，慢慢切，慢慢拼，最後拼出來公式，也就是「半周乘半徑」。我比較好奇的是，編者顯然爲了要教授圓面積公式＝半徑×半徑×3.14，所以，他們必須要提供一個有關圓周長＝直徑×3.14 的公式。然而，問題來了，圓面積公式有沒有必要非教「半徑×半徑×3.14」不可？是不是可以只教半周乘半徑？我想這是我們的取捨問題。我提供這段材料的主要想法，是主張有些時候我們參考一下古代人的想法也不無啓發，這是我的一個反思，請大家參考指教。

另一方面，π 的近似值應該取多少呢？日本人爲了這個問題也一天到晚在「吵架」，究竟要取 3，還是 3.1，還是 3.14 呢，一直爭論不休，甚至日本科普的書也一直在吵這個問題。此外，如果國小的圓面積公式是 3.14×半徑平方，到國中變成 π×半徑平方，那麼，從 3.14 到 π 怎麼辦（如何銜接）呢？很多國中老師跟我說不用擔心，反正學生都知道啦，到了國中階段橫豎都必須背誦 πr^2，可是，爲什麼把 3.14 改成 π 呢，卻從來沒有人說清楚講明白。小學老師跟國中老師也都搞不清楚怎麼回事，所以，這牽涉到國中小的數學教師是不是要做知識「縱深面向的統整」，值得我們共同來關心。

最後，我們評論美國加州公立學校數學課程架構 (*Mathematics Framework for*

California Public Schools: Kindergarten through Grade Twelve, 2000)，這是由 Curriculum Development and Supplemental Materials Commission (CDSMC) 所主編。由於批判數學教改的數學家相當推崇此一架構，因此，我特別注意到其中一些材料的涉及了知識邏輯問題，非常值得我們反思。比如說吧，有關 8-12 年級的「幾何課程架構」，他們就強烈主張：

> 數學的最重要目標，是教授學生邏輯推論。隱含在數學學習中的邏輯推理，允許我們將數學應用到很大範圍的情境上，其中有關實際問題的解答可以達到精確的程度。上了八年級以後，學生的數學敏銳度應該強化。他（她）們需要開始理解邏輯的奧妙，並體會到下結論之前實質有效的論證之需求。數學推理與概念理解不應與內容分離；它們是內稟 (intrinsic) 於學生在更高層次精通的數學分科之中。

因此，

> 三角形或多邊形與外接圓的關係，應該及早安排教授。在幾何課程中，似乎沒有人好好考慮將有關圓形的定理趁早引進。譬如說吧，有關在圓形中等弧對等角的一些相當特出的定理，必須在介紹完幾何公理之後三週內就呈現給學生。而這，主要的目的是證明下列兩個定理：1.等腰三角形兩底角相等；2.一個三角形的外角等於兩個遠內角的和。

現在，我們來看一下他們這樣的主張是不是合理。這當然見仁見智！不過，如果我們把它拉回到歐幾里得的《幾何原本》脈絡之中，或許我們就很容易發現我們所憂心的問題之所在。當然，很多人會認爲我們不需要如此大費周章，把參考座標放在《幾何原本》，可是，到目前爲止，整個幾何知識有結構性的東西，基本上都系出《幾何原本》，所以，這是我們唯一較好參考的一個座標。

如果對照《幾何原本》的邏輯順序，那麼，在《幾何原本》(*The Elements*) 中，等弧對等角之相關定理，卻是安排在第 III 冊命題 27、28 與 29：

> III. 27.　在等圓中，等弧上的圓心角或圓周角是彼此相等的。
>
> III. 28.　在等圓中等弦截出相等的弧，優弧等於優弧，劣弧等於劣弧。
>
> III. 29.　在等圓中，等弧所對的弦也相等。

然而，證明 III. 27，就依賴了 I. 23、III. 20 與 III. 26。但是，III. 20 的證明依賴了 I. 5。III. 26 依賴了 III. 24，從而 III. 10，乃至於 I. 8，後者最後還是依賴了 I. 5。至於 I. 23 則是基於 I. 8，於是，最終還是仰賴了 I. 5。所以，我們若想利用 III. 27 來引進『等腰三角形兩底角相等』之命題，而又不想離開歐幾里得的脈絡，那麼，我們勢必無法迴避邏輯推論上的循環謬誤 (circular fallacy)。再以 III. 28 與 III. 29 的證明爲例，前者至少依賴了 I. 8，因而一定逆推回 I. 5，於是，循環謬誤仍然無法避免。同理，證明 III. 29 必須依賴 III. 27，於是，循環謬誤依然。至於命題 I. 5（亦即俗稱的「驢橋定理」）的（完整）內容爲：

> 在等腰三角形中，兩底角彼此相等；並且若向下延長兩腰，則在底以下的兩角也彼此相等。

當然，如果堅持用這種順序來教，那麼，這裡面馬上會牽涉到一個問題，那就是：「邏輯嚴密」跟「直觀推論」這個平衡點要抓在哪裡？比如說，這個加州的架構設計者

的想當然爾及早引進三角形外接圓，在邏輯嚴密性上無法自圓其說。

同理，如果我們利用等角平分線來證明等腰三角形底角相等的話，下場也差不多，這是因爲角平分線作圖命題是 I.9，它要依賴 I.8，最後要依賴 I.5，所以，大家所熟悉的方法比如頂點向底邊作高，作底邊的中線等等其實都有問題。

我不是故意要挑戰各位，不過，當我們在討論嚴密 vs. 直觀的時候，要抓平衡點。當然，平衡點會跟你面對的學生，跟面對哪一年級的學生都有關係。這麼說來，究竟有沒有出路呢？我想在此值得推薦荷蘭數學教育大師 Hans Freudentahl 的「局部組織」(local organization) 的主張：

> 在幾何學入門課程中，學生應該被帶領利用幾何概念及其性質，學習組織空間中的形體與現象。在一個更高的層次中，他應該利用邏輯關係來組織這些概念及其性質。至於在這一層次之上，則這整個關係系統可以成為學生探討的主題。

Freudenthal 以三角形的「外心定理」爲例。他認爲：勞師動眾到整個歐氏《幾何原本》系統，以便爲此一定理提供一個完整的證明，是不必要的。因此，他不主張從中垂線的等距離性質開始，一直推演到這三條中垂線相交並交於同一點，反倒是「我們應該專注於某些在特定情境中有趣的一些面向，而將其他的一些面向視爲已知（或理所當然）。如此一來，所謂的「局部組織」，意在對某些「構圖」(configuration) 的探索，而不是想在一個大系統 (large system)（譬如歐氏幾何）中建立一個純演繹的真理。」顯然基於這樣的主張，Hanna 與 Jahnke 也認爲：我們有必要在「大理論」(large theory) 與「小理論」(small theory) 之間區別開來。與其在課程架構中建立一個「大理論」，我們不如圍繞那些根本且有啓發性的應用面向，研擬幾個「小理論」(Hanna and Jahnke, 2002)。相形之下，備受攻擊的「九年一貫暫綱」中的「局部推理」，顯然沒有把話說清楚，因此，它的「莫名冤死」才會成爲千古憾事！

五、教師教育

有關 *Mathematical Education of Teachers* (2001) 的標題，一開始閱讀此一文獻時，我就蠻注意到一個形容詞，爲什麼 “mathematical” 不是放後面，而是放前面呢？原來，這個由美國 MAA (Mathematical Association of America) 所發行的文獻強烈主張：國小五年級以上的數學課程，應由數學主修的教師來教。顯然，本書編者非常不希望美國的數學老師素質太爛。這是一個根本的主張，至於是否做得到，我們並不清楚。

不過，本書還是提出一些策略，我想很簡略的介紹一下，那就是，他們一開始組織一個委員會，以突顯教師教育的重要性。其中，提到兩個問題，一個就是教師培育，一個是教師專業發展。至於這兩者共通的部份，正是 PCK (pedagogical content knowledge)，也就是，強烈地突顯 PCK 的重要性，然後要模仿教學醫院的設計，要設立教師的專業發展學校，以便讓實習教師、資淺教師、資深教師齊聚一堂之後，結合師資培育院校的資源，來建立專業發展，乃至終身學習的夥伴關係。

另一方面，這 MAA 主導 MET (Mathematical Education of Teachers) 這個計畫的時候，訴求的對象其實有四個：1. 數學系的領袖人物，特別是系主任；2. 數學系的一般成員；3. 偶而針對未來數學教師開設課程而需要協助的教授；4. 主導未來的中小學數

學教師之訓練課程與教學的教授。這文獻的訴求對象大概這些，其次，他們認爲說數學教師的專業素養必須要大幅度提升，第一點我剛剛講過了，數學系必須要提供一些制高點課程，來幫助未來教師進行縱深式的統整，統整大學跟中小學的數學知識。爲此，數學家跟數學教育家應該發展夥伴關係。這是因爲在綜合大學裡面，數學系加上教育系的訓練，不會自動產生數學教育的訓練成果，所以，美國的 MAA 希望協助數學家跟數學教育家發展夥伴關係，這是他們這一波教育改革的關鍵任務。譬如，密西根大學 (University of Michigan) 的策略， 就是延聘傑出數學家 Hyman Bass 爲數學（系）講座教授兼數學教育教授，並提升數學教育教授 Deborah Ball 數學教育講座教授，共同主導數學教育研究計畫。Bass 爲學相當誠懇，有很多令我們感動的東西。本系左台益曾經在訪美時與 Bass 接洽，他很願意來台灣講學，與我們進行數學教育交流。我們將來或有機會，聽聽貝斯談論他對數學教育的一些看法。

美國數學教育家與數學家合作的另一個範例，就是 *Common Ground in K-12 Mathematics Education* 之問世，這是數學家跟數學教育家的共識：國中、小數學教育裡面哪些東西是重要的。這個文獻由 Deborah Ball 等三位數學教育家，以及另外兩個數學家合作完成，我想本文獻提供的大概有七、八點共識，第一個是自動記住基本事實 (automatic recall of basic fact)。第二點，是有關電算機的使用，他們認爲不宜太早引進，很清楚說明這一點，我們國內對於這一點也非常謹慎。第三點，就是算則 (algorithm) 的學習，他們特別強調說學生必須熟練算則。第四點是有關分數，他們一直很在意，所以，把分數的學習講得非常重要。事實上，數學教育專家講得比較清楚的其實並沒有很多，不過，他們覺得這是學習代數的基本。然則爲什麼對學習代數很重要，也沒幾個人講得明白，我覺得很可惜。第五點，就是在情境裡面教學的意義在哪裡，他們也指出不要太過勉強，有時候，我們實在找不出情境就算了啦。其實，荷蘭人的現實數學 (RME, realistic mathematics education) 比較務實，值得效法。再來第六點就是教學法，他們強調學生可以透過任何可能方法的組合，進行有效的學習，也就是說，數學知識裡面用來教學的部分，具有一些很特殊的性質，它們跟數學家平常在面對數學知識不完全一樣。第七點也是最後一點，則是有關教師的必備知識，其中涉及的內容除了強調學科專業素養之外，還特別指出 PCK (pedagogical content knowledge) 的不可或缺，而這基本上呼應了 *Mathematical Education of Teachers* 有關中小學教師訓練的內容。

現在，如果一個數學主修的大學生將來打算擔任中小學數學教師，那麼，他大學四年應該修哪些課程呢？*Mathematical Education of Teachers* 第七、八、九章分別提出了十分具體的建議。其中，尤其針對綜合大學的數學系之課程，提出很高的期許：一方面，核心的數學知識的內容與教學可以重新設計，以便協助未來教師在大學數學與中小學數學之間，進行有意義的縱深連結；另一方面，數學系也應該設計、發展並提供「一系列拱心石課程」(capstone course sequence)，從高觀點檢視中小學數學的概念（學習上的）困難、基本觀念，以及技巧。這種課程系列對未來教師特別有用，以函數爲例，我們從高觀點所做的反思性回溯，必然觸及函數概念的歷史演化，以及有關數學與其他學科的連結和應用（譬如建模），因此，特別值得我們重視。

有關課程精神如何實踐，日本人也針對教改提出一些反思，茲簡單介紹如下。根據

丑田俊二的說明，從 2003 年起，日本高中數學新設「數學基礎」，與「數學 I」並列。「數學 I」與過去一樣，以學習數學技能爲目的，相較之下，「數學基礎」則著重在學習「數學在社會生活中的貢獻」及「數學的思維」。因此，它涵蓋了可傳遞數學趣味的題材與數學話題。至於本課程成功與否，則取決於老師對於教材的研究是否透徹，以及事前的準備是否齊全。如果老師只單純說明內容、介紹歷史事實，則不會有任何幫助。教師最好能夠利用善用書本題材，暢言數學的趣味、數學家們的精神與想法。在這新的教科書裡，加入「個人信貸的利息與水費的計算」等實際的問題。看起來「數學基礎」或許對大學入學考試沒什麼幫助，然而，如果教師願意下功夫，對於討厭數學的學生來說，或許可以成爲一個避風港。換句話說，如果能夠提高內容的吸引力，那麼，選擇「數學 I」的學生也許都要改選「數學基礎」，到時候客滿的教室一定很熱鬧吧！

六、結論

過去這一陣子，有關「建構主義教學法」（被不當地稱之爲「建構數學」）的沸沸揚揚爭議，消耗了不少的社會成本。如果對比「建構主義」(constructivism) 與「柏拉圖主義」(Platonism)，請問老師你要站哪一邊？請不要忘記：建構主義可以不主張數學真理存在，而柏拉圖主義剛好相反。身爲一個教師要不要跟學生指出數學真理的存在，這事的確有一點兩難，所以，在我看來，也許這些所謂的主義，譬如行爲主義 (behaviorism)、結構主義 (structuralism)、建構主義、後現代主義 (post-modernism)、新行爲主義 (neo-behaviorism) 等等，都可以暫時「放下」。我建議「主義一律不從」，回歸教育現場與實用主義 (pragmatism)，模仿鄧小平的「貓之哲學」，只要會抓老鼠就是好貓，不管貓是黑的還白的。無論如何，現在我們應該清點一下建構主義的資產。其實，我們很多人都已經深深受惠，但似乎又「不便」講出來。所以，數學教育家跟數學家的積極對話，我們還是要繼續努力促成。

有關十年教改的「恩怨情仇」之釐清，我們做得實在不夠－我覺得太少人提供反思，無法豐富我們的「教改想像共同體」。我指的是真正積極投入、有貢獻的人，在這方面的反思太少，所以，我們應該多出版一些「教改物語」。然後，爲了貫穿十二年國教的核心主軸與能力，比如說函數、建模等等，再看課程與教材之沿革，以及教師教育是否能夠因應？無論如何，數學知識離不開有用與有趣，我還是覺得「良師興國」，跟國家競爭力息息相關，不然，美國人不需要這麼重視。其實不止美國，很多國家都一樣。不過，我今天選擇比較容易看得到的資料，譬如數學教育家 Anna Sfard 去年發表的文章，她說 1960－1970 年間是「課程年代」(era of curriculum)，1980－2000 年間是「學習者年代」(era of the learner)，還有，過去這幾年來則是「教師年代」(era of teacher)，她指的是數學教育研究的對象，教師教育 (teacher education) 已經變成一個主軸，這反映教育現場的迫切需求，給各位做參考。我想就很簡單的講到這裡，各位有問題的話，隨時指教，謝謝。

後記(2006/11/30)：

感謝本校實習輔導處的盛情邀約，讓我有機會整理一些有關數學教育的反思。本文

是利用演講錄音謄錄稿修飾而成，對於幫忙謄錄者、李建勳與趙國亨協助畫圖，也一併在此致謝。

參考文獻

王世仁 (2002).〈在・太・遲・之・前〉,《科技報導》91 年 10 月 15 日，頁 6-9。

丑田俊二 (2005).《愛上數學的第一本書》，台北：商周出版社。

洪萬生 (1999).〈數學史與數學教育〉，收入洪萬生，《從李約瑟出發》（台北：九章出版社一版二刷），頁 12-21。

洪萬生 (2003).〈作伙來關心：歡迎參加『數學教育對話』研討會〉,《自由時報》92 年 2 月 17 日。

洪萬生 (2003).〈建構主義 vs. 柏拉圖主義：親愛的老師你站在哪裡？〉,《數學教育》16：27-30. 也收入洪萬生，《此零非比０》（台北：商務印書館，2006），頁 38-43。

洪萬生 (2004).〈美國數學家如何介入數學教育？〉,《科學月刊》35(2): 160-161。

洪萬生 (2004).〈HPM 隨筆（三）: 2004 勾股定理的『非常』遐想〉,《HPM 通訊》7(1): 1-3。

洪萬生 (2004).〈教改爭議聲中，證明所為何事？〉,《師大學報・科學教育類》49(1):1-14。

洪萬生 (2006).〈數學史與代數學習〉，收入洪萬生，《此零非比０》（台北：商務印書館），頁 167-183。

洪萬生 (2006).《此零非比０：數學、文化、歷史與教育文集》，台北：商務印書館。

馬立平 (2005).〈美國小學數學教學內容體系瓦解三部曲〉，發表於「數學教育研討會」，香港：香港教育學院數學系，2005 年 7 月 6-8 日 。

張奠宙 (2005).〈中國大陸最近的數學論戰以及數學本質的教育呈現〉，發表於「數學教育研討會」，香港：香港教育學院數學系，2005 年 7 月 6-8 日 。

陳宜良等 (2005).《中小學數學科課程綱要評估與發展研究》。

顏志成 (1993).《Felix Klein 的數學教育思想》，台北：國立台灣師範大學數學研究所碩士論文。

顏志成 (2003).〈哥廷根學派的領導人－Felix Klein〉,《HPM 通訊》 6(4):8-14。

Ball, Deborah L. and Hyman Bass (2000). “Interweaving Content and Pedagogy in Teaching and Learning to Teach: Knowing and Using Mathematics”, in Jo Boaler ed., *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 83-104). London: Ablex Publishing.

Ball, Deborah L., Joan Ferrini-Mundy, Jeremy Kilpatrick, R. James Milgram, Wilfried Schimid, Richard Schaar (2005). “Reaching for Common Ground in K-12 Mathematics Education”, http://www.maa.org/common-ground/cg-report2005.html

Bednarz, Nadine, Carolyn Kieran and Lesley Lee eds. (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.

Curriculum Development and Supplemental Materials Commission (CDSMC) (2000). *Mathematics Framework for California Public Schools: Kindergarten through Grade Twelve* (revised edition). Sacramento: California Department of Education.

CBMS (2001). *The Mathematical Education of Teachers*. http://www.cbmsweb.org/MET_Document/

Cuoco, Al (2003). "Teaching Mathematics in the United States", *Notices of the AMS* 50(7): 777-787.

Dehaene, Stanislas (2000).《數字感：1・2・3 哪裡來？》，台北：先覺出版社。

Freudenthal, Hans (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Hanna, Gila & Niels Jahnke (1996). "Proof and proving", in Bishop, J., K. Clements, C. Leitel eds., *International Handbook on Mathematics Education*.

Heath, Thomas L. (1956). *Thirteen Books of Euclid's Elements*. New York: Dover Publications, INC.

Jackson, Allen (2003). "Presidential Views: Interview with Hyman Bass", *Notices of the AMS* 50(2): 232-234.

Katz, Victor J. and A. Tucker: "Preparing Mathematicians to Educate Teachers (PMET)", (MAA funding)

Lewis, James (2001). "Spotlight on Teachers", *Notices of the AMS* 48(4): 396-403.

McCallum, William G. (2003). "Promoting Work on Education in Mathematics Departments", *Notices of the AMS* 50(9): 1093-1098.

Sfard, Anna (2005). "What Could Be More Practical than Good Research?', *Educational Studies in Mathematics*: 393-413.

2008/11/2 附記：

本文原收入陳麗桂、林陳涌、張俊彥主編，《中小學數學與科學教育改革的回顧與展望》（台北：國立台灣師範大學），頁 45-68。此處所貼版本，已經過修訂。