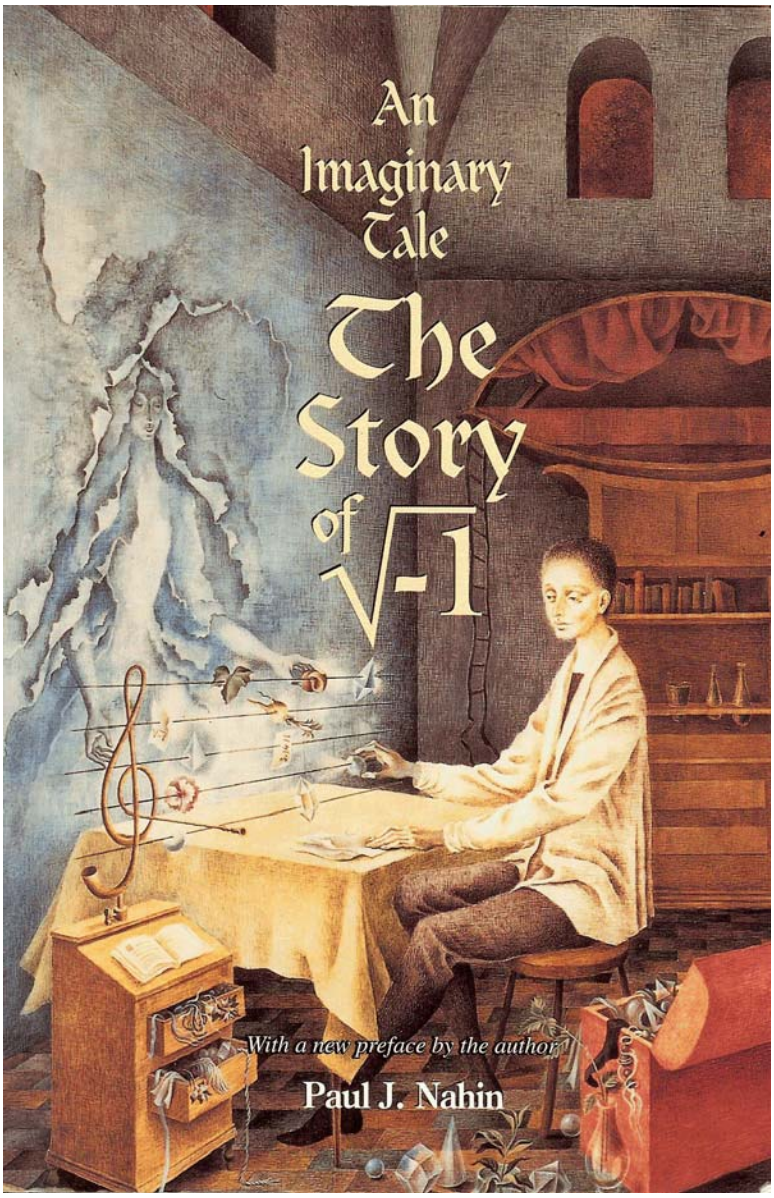
書評《虛話實說：$\sqrt{-1}$的故事》

英家銘
台灣師大數學系

書名：虛話實說：$\sqrt{-1}$的故事（*An Imaginary Tale: The Story of* $\sqrt{-1}$）
作者：保羅・納亨（Paul J. Nahin）
出版社：Princeton University Press
出版年份：1998 初版，2007 再版
出版資料：平裝共 288 頁，網路書商定價 16.95 美元
國際書碼：ISBN 0-691-12798-0



前言

歐拉公式 $e^{i\pi}+1=0$ 所以被認爲是最漂亮的公式，主要是因爲它連結了數學史上五個最重要的數目：$e, i=\sqrt{-1}, \pi, 1, 0$。其中除了數目 1 之外，其他四個數目都有數學普及著作出版，實在是現代讀書人分享數學知識的價値與意義的一大福音。本文所評論的《虛話實說：$\sqrt{-1}$ 的故事》就是其中之一。最近，《科學的美國人》(Scientific American) 讀書俱樂部在招攬會員時，就以《π 的傳奇》(The Joy of π)、《毛起來說 e》(e: The Story of a Number)、《零的故事》(Zero: The Biography of a Dangerous Idea)、[1]《黃金比例》(The Golden Ratio)，以及《虛話實說：$\sqrt{-1}$ 的故事》(An Imaginary Tale: The Story of $\sqrt{-1}$) 爲贈品，[2]可以見證數學社群有關知識本質的一些共識。其中，顯然是因爲少了一本專論數目 1 的普及著作，[3]所以，《科學的美國人》讀書俱樂部才會以《黃金比例》一書代之。事實上，所謂的黃金比例（率），是指 $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，也是一個十分有趣和有用的數目，其重要性差可比擬美國NBA職籃的最佳第六人。

內容簡介

本書的標題，很清楚地告訴我們，它的內容就是要說虛數 $\sqrt{-1}$ 的故事。對於所有的高中生來說，在學到負數的平方根時，一定會有疑惑：$\sqrt{-1}$，除了當考試時的標準答案之外，到底有何用處？畢竟，我們在生活中有太多的事物可以用來想像正負實數，例如資產負債、溫度、地圖方向等等，但是，生活中哪裡可以用到一個東西它的平方竟然是負數呢？身爲電機工程學者的作者納亨，寫出一本 $\sqrt{-1}$ 的故事，雖然不會告訴我們生活中有那個東西的平方是負數，但是，他想要讓稍微具有數學與物理基礎的一般社會大眾與高中生瞭解，複數理論的發展絕不只是某些數學家的智力遊戲，而是有它歷史的緣由，並且在物理學與電機工程上還有不少的應用！

本書包含緒論、七個章節與六篇附錄，正文主要敘述複數的出現、發展以及應用，而比較困難或複雜的數學理論與計算則置於附錄。緒論令人意外地從古埃及紙莎草紙開始，不過，裡面並不是說古埃及人考慮過負數的平方根，而是提到一個截頂方錐 (truncated pyramid) 的體積公式：$V=h(a^2+ab+b^2)/3$，其中 a、b 分別爲上下基座的邊長，h 爲方錐垂直高度。海龍 (Heron) 也知道這個公式，但他認爲因爲 h 無法由截頂方錐的外表直接測量而得，所以，他給出了由可直接量得的斜邊 (slant) c 求 h 的公式：$h=\sqrt{c^2-2(a-b/2)^2}$。接著的問題中，有一題的數據是下基座邊長爲 28，上基座邊長爲 4，斜邊爲 15。如此得到的 $h=\sqrt{-63}$，不過，海龍給出的答案卻是 $h=\sqrt{63}$。另外，丟番圖 (Diophantus) 在他的書中問道：給定一直角三角形，面積爲 7，周長爲 12，求三邊長。這個題目丟番圖認爲是不可能的。作者就以這兩個問題來展開全書，他認爲這是人類最早遇到「解答」

[1] 國內出版中譯另有一本《從零開始》(The Nothing That Is: A Natural History of Zero)。
[2] 這五本書中，除了《虛話實說：$\sqrt{-1}$ 的故事》之外，都有中譯出版。
[3] 按：2007 年英國 BBC 電台曾製作 “The Story of 1”，値得參考。

是複數的問題。

第一章是解三次方程式的故事，塔爾塔利亞 (N. Tartaglia) 與卡丹諾 (G. Cardano) 的競爭自然是重點，另外就是迫使數學家把虛數當一回事的例子：邦貝利 (R. Bombelli) 嘗試解三次方程式 $x^3 = 15x + 4$ ，帶入所謂的卡丹諾公式，解得 $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ ，但是 $x = 4$ 是個明顯的解，所以，虛數的出現不一定代表無解，且兩複數之和可能等於實數。這一章也提到邦貝利對 $\sqrt{-1}$ 的符號操弄，與作者給出的一些現代人解方程式數值方法。

第二章主要是笛卡兒 (R. Descartes) 與沃利斯 (J. Wallis) 對詮釋複數幾何意義的嘗試。這類的嘗試，在第三章出現高潮，因為十八世紀末的北歐測量技師維瑟爾 (C. Wessel) 最早提出相當於現代的複數平面的想法，由於這樣的表徵可以處理複數四則運算的問題，同時，也可以將複數與三角函數連結，所以，一直到今日，我們都是用這樣的方式來以幾何表徵複數。這一章也說到維瑟爾的想法沒有廣為流傳，後來複數平面的表徵在歐洲又被重新發現的過程。說到複數與三角函數的連結，作者很自然提到了極座標以及指數函數： $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 。這裡也預告了天才數學家歐拉 (L. Euler) 的貢獻。歷史發展的故事到這裡暫告一段落，接下來作者就要告訴讀者複數的大用。

從第四章開始到第七章，主要的內容都在告訴讀者複數各方面的應用。第四章與第五章是一些在數學解題、牛頓力學、相對論以及電機工程中的出現的複數，其中第五章有較長的篇幅報導刻普勒與牛頓研究行星運動的過程。此外，這一章後半給出了兩個有名的例子，說明複數對電機工程的重要性。

第六章名為〈鬼才數學〉(Wizard Mathematics)，主要描述歐拉在數學上應用複數的貢獻。從導出 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ，到如 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ 的無窮級數和，一路講到 ζ (zeta) 函數與 Γ (gamma) 函數。這一章是全書數學份量最多的章節，充分顯示歐拉的天才與他巨大的貢獻。

第七章又回來談到一些十九世紀複變數函數論的歷史，重點自然是柯西積分定理與其應用。這一章也有不少數學計算，以及葛林定理 (Green's Theorem) 與柯西積分公式的證明。

評論

看到內容簡介，讀者一定會驚訝，一本要賣給一般大眾的書竟然包含那麼多的「硬」數學與「硬」科學。不過，這絕不能說是本書的缺點。筆者認為，這是說明複數應用必須做的事。當然，作者很努力地要讓本書的閱讀門檻降低，所以，他花了很多篇幅在解釋基本的數學、力學與電學的概念，並且省去一些複雜的計算，讓讀者看到最後的結果。筆者認為，除了高中數學之外，閱讀本書需要瞭解一點微積分與非常基礎的微分方程「就可以」了，關於力學與電學的內容，你可以信任作者的概念敘述功力。

讓我們稍微仔細一點來考察本書的部分內容。請容許筆者先說幾個這本書的小缺點。由於這本書的作者背景是電機工程，而非數學或數學史，所以，在數學家或數學史家的眼中，本書部分的處理手法與評論可能有值得商榷之處。例如，在說明維瑟爾的複數平面模型三角函數表徵之後，作者就急於展現複數的威力，想要用複數的乘法來「證明」三角函數的和角公式。事實上，從數學發展的觀點來說，恰恰是因爲三角函數和角公式的成立，才使得維瑟爾的模型可以用來表徵複數系與其上的四則運算。作者自己也承認，維瑟爾的論文做的是跟他相反的論述。

再者，作者對歷史的描述，常給人「以今是論昨非」的感覺，比如他在字裡行間不斷「惋惜」海龍、丟番圖與笛卡兒沒能發現複數的意義（雖然作者自己也不斷說明，無實數解的方程式的確對古代數學家造成一些困擾，或是代表原來的應用問題無法解決）。他說亞里斯多德是個 “poor scientist”，或是從牛頓與刻普勒之後，「天文學才開始是一門科學」。筆者斗膽說句不禮貌的話，我彷彿看到科普界的柏楊前輩，他寫了一系列很好的普及著作，但是評論太過以現代爲中心。另外，作者也數次引用了 E. T. Bell 的兩本書，而其中 *Men of Mathematics* 一書已被當代數學史家認爲是不夠嚴謹的著作，所以，讀者對書中許多數學家的個人生活描述，可以當作後人的說法之一就好了。好在，書中的牛肉 – 數學 – 應該是沒有大問題的。

還有一點，就是作者常常將現代教科書用的證明、數值方法或詮釋，附在相關的歷史發展故事之後。例如，給定一個無實根的二次方程式，或只有單一實根的三次方程式，以及它們的圖形，作者告訴我們，如何利用（電腦）作圖，找出複數根的實數與虛數部分。或者給定一無實根的物理問題，其解的虛數部分可對應於此物理問題什麼部分。以上都被放置在古代數學家嘗試理解複數意義的章節之後，以便作爲對照。嚴格說來，這不完全是缺點，只是讀者必須要小心的分辨何者爲古代數學的發展，何者是今人的應用。還有，一個複數的「虛數」部分（即 $a+bi$ 中的 b），仍然是一個「實數」，所以，虛數部分的物理意涵不可以視爲複數本身的物理世界表徵。

當然，如果讀者在乎的不是數學發展與歷史，而是複數的應用，上述的小缺點可以不必在意。作者從電機工程師的立場來看，提出了複數許多的應用，這是本書最大的優點。他在敘述複數在物理學與電機工程的應用時，講得十分淺顯易懂。筆者自從高中畢業之後就沒有認真唸過物理，但是，本書對例子的敘述，竟然讓筆者幾乎完全看懂了，這也是筆者要大力推薦讀者仔細閱讀的部分之一。作者在 5.4 節用複數的指數表徵，以數學計算說明，何以在地球上看到的行星有時會往反方向行進，這不是當年刻普勒的解釋，但是，這是其中一個複數指數函數展現威力的例子。在電機工程方面，作者從基本電學的概念出發，講解電阻器 (resistor)、電容器 (capacitor)、誘導器 (inductor) 與擴大器 (amplifier) 的數學定義，然後用複數解決一個有名的 Rayleigh 謎題。在本書 5.6 節，他介紹一組用上述元件組成的電路，而這個電路要發揮功能，必須要藉助複數來解一組八條的聯

立微分方程式。這個電路後來幫助兩個年輕人在 1930 年代開設一家公司，現在享譽全球，台灣許多人也一定用過他們的產品。至於這裡的電路與公司爲何，就請大家去看書吧。

有關複數在數學本身的應用，作者也舉出不少例子。除了前面提到的無窮級數之外，最重要的大概是柯西 (A. Cauchy) 的積分公式了。這裡作者用了並不會太困難的語言，敘述柯西的路徑積分 (contour integration) 如何可以應用在一些很困難的「實」變數函數積分上面，例如$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2bx)dx=\frac{1}{2}e^{-b^2}\sqrt{\pi}$，或是$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{e}$等等。這裡作者對柯西積分定理的說明，以及積分計算，只需要大一微積分的基礎就可以看懂，不至於太過困難。這些例子也呼應書中引用的哈達瑪 (J. Hadamard) 的名言：「在實數領域中，兩件事實的最短距離會通過複數領域」。

綜上所述，筆者認爲這本《虛話實說：$\sqrt{-1}$的故事》，雖然有些小缺點，但是瑕不掩瑜，是可以讓讀者瞭解複數歷史發展與應用的好書。筆者特別要推薦給具有理工背景的大學生或社會人士，以及中學數學與科學教師閱讀，因爲當讀者具有一些數學背景時，更能體會複數的應用威力，而中學教師除了告訴學生虛數可作爲方程式的解之外，還有不少真實世界的應用例子可以大致描述給學生瞭解。

優秀數學科普作品的指標

評價方式：指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

1.知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)

(1) 認識論面向　☆☆☆☆

(2) 方法論面向：☆☆☆☆

(3) 歷史或演化面向：☆☆☆

(4) 哲學面向：無

(5) 教育改革面向：無

(6) 與自然科學、人文社會乃至生活經驗的連結：☆☆☆☆☆

2.形式或表達 (Form or representation)

(1) 創新手法：☆☆☆

(2) 數學知識的洞察力：☆☆☆☆

(3) 歷史事實的洞察力：☆☆☆

(4) 異文化的啟蒙意義：☆☆☆

(5) 忠實可靠的參考文獻：☆☆☆

(6) 敘事的趣味性、可及性與一貫性：☆☆☆☆☆

(7) 中譯本的品質（若需要）：無中譯本

3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form)

(1) 青少年層次： ☆☆

(2) 一般社會大眾：☆☆☆

4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage)：

按：由於本書重點在於複數的應用，讀者必須閱讀其中數學的推導過程，所以並沒有任何一小段話可以代表本書的精神。筆者在這裡推薦 5.3~5.4 節（複數在詮釋行星運動的應用），5.5~5.6 節(複數在電機工程的應用)，6.1~6.2 節（歐拉發揮複數的威力），以及 7.3~7.6 節（柯西積分的應用）。這些是本書最精華所在。