

爲什麼搞不懂數學（暫譯） 《数学でつまづくのはなぜか》

陳昭蓉
台灣師大數學系畢業
東京工業大學研究所經營工學專攻博士

書名：数学でつまづくのはなぜか
作者：小島寛之 (Hiroyuki Kojima)
出版社：講談社【現代新書】
出版年份：2008（2008年1月20日一刷，2月6日三刷）
出版資料：平裝本，共237頁
國際書碼：ISBN 978-4-06-287925-5



小島寛之在日本已經出版過許多數學普及書籍，例如《從零開始學習微分和積分》、《文科學生的數學教室》等等，目前在台灣有中文譯本的著作是《從數學看人類的進步軌跡》。本次，就為大家介紹他在日本最新出版的作品《爲什麼搞不懂數學》（暫譯）。

本書內容正如書名所說，主要是探討爲什麼大家會有搞不懂數學的情況。作者在前言中，便開宗明義的說：「不要抱著學數學的心情讀這本書，當成你去找好朋友傾吐煩惱。」他認爲現在的書籍談到數學恐懼症，論調可以分爲兩大流派。第一種是拼命說服讀者「數學對你的人生助益良多」，另一種則是拼命讚嘆「數學是如此的自由如此神奇」。第一種以數學教育者居多，第二種則以數學家居多。很少人把焦點放在爲什麼小朋友會討厭數學，他認爲重點在於數學是一種

規範，要求孩子遵守許多數學世界的規則，可惜，孩子們無法輕易認同自己應該遵守這些規範，在他們眼中，與其說這些規則在數學世界中很重要，不如說只是「大人要求的」規則。

本書每一章各有主題，討論一般學生學習「代數」、「幾何」、「解析學（函數和時間性）」、「自然數」、「無限」主題時會面臨什麼問題。對許多讀者來說，閱讀時應該會忍不住回憶起自己以往在數學課上弄不懂的觀念。對許多父母和數學教師來說，想必腦中會浮現自己的孩子或學生作長犯的錯誤，甚至於看到自己一直無法清楚解釋的觀念。作者引述數學家對於這些數學觀念你來我往的討論，說明孩子們剛接觸到這些觀念時覺得難以接受其實很正常，有時候也會應用這些歷史上的討論，建議老師和家長如何向孩子說明。

舉例來說，學生上了國中之後開始學習負數。對小朋友來說，分數和小數之類的數只是計算很麻煩，可是碰上負數這種數，第一關卡則是理解負數的意義。還沒有完全理解這種概念時，又得學習如何計算，碰上「負負得正」也只好當成規則背下來（有時候家長也不知道該怎麼解釋）。作者以法國哲學家兼數學家巴斯卡為例，表示當時連數學家都否定「負數」的實際存在性，無法接受負數這種觀念，而且直到十九世紀之後，負數才納入正式的學校課程。連大數學家們都需要經過這麼久的時間才能接受負數，更別說是剛上國中的小朋友。

關於負數的概念和加減法計算的說明，作者提出商業上借錢的概念，以《九章算術》為佐證，佐以十二世紀印度和文藝復興時期義大利使用負數記帳的例子，說明負債的概念應該也是孩子們最容易理解的方式。不過懂了加減法，還有更麻煩的乘除法。作者提到，大文豪史湯達爾 (Stendhal) 閱讀數學家歐拉 (Euler) 的教科書，看到負數代表借款，心想「假如負負得正，豈不代表借款乘以借款等於財產」。作者以學校小朋友脫口而出的「反對的反對是贊成」這句話為例，提出以方向和時間說明負數記號的方法。以某個時間為原點，正負號可以代表時間的先後；正負號也可以代表氣球的上升和下降；以速度和時間計算距離的算式中出現正負，也能以位置思考符號代表的意義。

作者針對數學各種領域的觀念，提出大家學習數學時容易面臨的各種關卡，探討背後的原因，並以歷史佐證，尋求更好的說明方法。他不時地在文章中提醒讀者，從先人的例子看來，孩子會這麼想其實一點也不奇怪。正因為孩子有感受數學的能力，才會出現不同的反應。孩子感受數學的方式與教科書不同，並不是錯誤。理解這種感受背後的原因，才能填補數學要求的規範和孩子的感受之間的差距。

除了探討容易搞不懂的問題之外，本書也從哲學和認知的角度討論數學。探討自然數概念時，作者先討論在幼兒眼中數是什麼。然後舉出兩種流派：以「下

一個」的方式數數兒的方式以及利用集合的共通性質的方式。在日本，這兩種流派分別以藤澤利喜太郎和遠山啓為代表人物，以往的主流本來是藤澤利喜太郎的數數兒流派，然而，當遠山啓看到自己的女兒學得很痛苦，而提出另一套觀點之後，這種集合主義逐漸取代原本的方式。作者認為，孩子們比較容易透過集合的共通特性了解數的概念，原因在於事物有「讓人了解數目相同的特性」，而一般人天生就有感受那種特性的感受器，是一種 affordance 的概念。有些人出生時這種感受器就已經受損，雖然智能和正常人一樣，卻一輩子無法以正常人對數的理解方式，去理解數的概念。

即便如此，作者秉持他凡事並沒有唯一的觀點，以 affordance 理論打了比方。動物以眼睛接收環境中的光線時，主要有兩種類別，分別凸狀和凹狀。人的眼睛是凹狀，不過，昆蟲的眼睛是凸狀，所以，不像人眼會把光線集中到一點，也不會連接影像。然而，昆蟲的眼睛卻和人眼一樣扮演了視覺的角色。這項發現使得人類不得不改變自己對於知覺的認識，「看東西」的行為，未必等於透過我們眼睛看東西的方法。人不能說昆蟲的眼睛和人不同，所以，昆蟲並沒有看到這個世界的情景。人類看到的世界、昆蟲看到的世界，都是這個世界的樣貌。每個人看自然數，同樣可以透過不同的方式，看到不同的樣貌。沒有誰對誰錯，都是自然數的樣貌。

最後一章，作者以同樣的觀點討論數與無限的深淵，列舉諸如羅素 (Russell)、弗雷格 (Frege)、馮·諾因曼 (von Neumann)、狄德金 (Dedekind) 等人的見解，呈現不同數學家探討同一種概念的不同面向。這一切的說明仍然依循作者的理念，豐富地鋪陳了人具有感受數學的能力，感受方式因人而異的論調。

在最後的尾聲之中，小島寬之回憶起自己教過的幾位學生。有的是以往就是成績優異的學生，有的則是原本對數學毫無興趣，卻因為小島寬之在某學期最後一堂課上放下課本，漫談康托爾 (Cantor) 對於無限集合論的想法，因此對數學改觀，現在已經成了數學博士。還有一名小島寬之始終想不起來長什麼樣子的學生，在畢業之後竟然寫信給小島寬之說：他在學校時討厭數學，離開學校之後依然討厭數學，不過「小島老師的幾何課很有趣」。每個學生都以自己的方式感受數學，而數學老師能做的，就是盡量提供各種學生多面向的思考機會和引導，當他們碰到適合自己的感受方法，自然也會以自己的方式對數學「開竅」——或者，繼續不開竅，不過那又何妨呢？

優秀數學科普作品的指標

評價方式：指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

1. 知識的實質內容

(1) 認識論面向：☆☆☆

(2) 歷史或演化面向：☆☆☆☆

- (3) 哲學面向：☆☆☆☆
- (4) 教育改革面向：☆☆☆☆☆
- 2. 形式或表達
 - (1) 創新手法：☆
 - (2) 數學知識的洞察力：☆☆☆
 - (3) 忠實可靠的參考文獻：☆☆
 - (4) 敘事的趣味性、可及性與一貫性：☆☆☆
 - (5) 中譯本的品質：不適用
- 3 內容與形式如何平衡
 - (1) 青少年層次：☆☆☆
 - (2) 一般社會大眾：☆☆☆☆
- 4. 摘錄本書最精彩片段

(初學者學習幾何時總會感到痛苦，不明白既然幾何學是要釐清「圖形的性質」，為什麼要以前一道定理為立足點證明下一個性質，採用這麼「縝密的論證」。pp. 63-64)

會面臨這種問題，是因為學習幾何學時必須學習「圖形的性質」和「論證」這兩種截然不同的面向。然而，「幾何學一定要和論證緊密不分」並非絕對的真理，那只不過是來自希臘數學的傳統，是處理幾何學的一種方法。

據說比希臘更古老的埃及和巴比倫已經擁有和希臘差不多的幾何學知識，然而埃及和巴比倫的學者認為圖形的法則「只是事實」，對於「為什麼如此」卻毫無興趣。可是希臘學者對於幾何學另有想法，他們不認為圖形的法則「只是個別的事實」，對於「彼此的關聯」和「有憑有據」。

為什麼同樣時代的學者性格也會不同。很多學者認為這是因為希臘是海洋國家，又是採取 polis 地方分權的都市國家。埃及和巴比倫有「國王」，有「絕對的力量」、「絕對的權威」，所以法則就是法則，不需要理由。然而希臘的各地區在 polis 自治體中各有勢力，凡事「好好商量」、「說服別人」是很重要的。西元前六世紀時身兼學者、政治家、商人的泰利斯 (Thales of Miletus) 到埃及留學之後回到希臘，沒有直接傳播埃及的幾何知識，而是想辦法找出圖形法則背後的依據。