

評論《睡蓮方程式》

臺北市興雅國中數學教師 林壽福

書名：睡蓮方程式
作者：亞伯特·賈夸(Albert Jacquard)
譯者：陳太乙
出版社：究竟出版股份有限公司
出版年份：2002
出版資料：平裝本共 170 頁，定價 180 元
國際書碼：ISBN-957-607-738-9



優秀數學科普作品指標

一、 評價方式

指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

1. **知識的實質內容** (Intellectual substance of knowledge)
 - (1) 認識論面向 (Epistemological aspect) ☆☆☆
 - (2) 方法論面向☆☆☆☆ (科學與數學方法)
 - (3) 歷史或演化面向 (Historical or evolutionary aspect) ☆☆☆☆
(凸顯科學知識的演化面向，強調科學成長的歷史意義。)
 - (4) 哲學面向 (Philosophical aspect)：☆☆☆
 - (5) 教育改革面向 (Education reform aspect)：☆☆☆☆☆
2. **形式或表達** (Form or representation)
 - (1) 創新手法 (Innovative approach: new story on old stuffs) ☆☆☆☆
 - (2) 數學知識的洞察力 (或洞識) (Insight into mathematical knowledge: inspiring and revealing) ☆☆☆☆
 - (3) 歷史事實的洞察力 (Historical insight or a sense of history) ☆☆☆☆
 - (4) 異文化的啟蒙意義 (Enlightening in cultural mathematics) ☆☆☆☆
 - (5) 忠實可靠的參考文獻☆☆☆
 - (6) 敘事的趣味性、可及性與一貫性☆☆☆☆
 - (7) 中譯本的品質 (若需要) ☆☆☆
3. **內容與形式如何平衡** (Balance in Content vs. Form)
 - (1) 青少年層次 (for adolescence)：☆☆☆☆☆
 - (2) 一般社會大眾 (for general public)：☆☆☆☆☆
4. **摘錄本書最精彩片段** (excerpt from the most exciting passage)：

除非是病理現象，否則，他們的聰明才智永遠是他們自己努力發展所得的暫時性結果。這些努力的動機並非為了在強迫且幼稚的競爭中戰勝他人，而是要以一種自動自發、充沛旺盛的好勝心超越自己。

要發展智力，必須先累積知識。知識本身並非目的，知識是用來幫助理解基本問題。每個人都必須能理解，才能對抗那古老落伍的蒙昧主義所造成的幻覺空想，才能加入選擇的行列，決定在面對新科技所帶來的新力量時，我們的社會該怎麼做。最重要的是，這樣才能進入交流網，讓人人都對自己的生命共同體有所承諾，投入心力。

這本書是作者在法國各地及南美洲的法屬中、小學，與當地學生演講和對談，在聽取那些年輕學子們的心聲後寫成的。作者很能符應 10 歲至 15 歲等各年齡層學生們的需求，開拓他們的視野和思考領域，分享個人的專業與人生經歷，並且對孩子們關心的問題做出妥適的回應。作者不僅是一位傑出的統計與遺傳學退休教授，更是一位關心科學與教育的行動派專家。他的核心理念，無非寄望在學的莘莘學子們，除了獲得不可或缺的科學新知外，也能學會治學方法和處世之道，更重要的是須養成批判的精神，打造自己的聰明才智，進一步加入城邦議題的交流網絡，未來可以在瞬息萬變的科技發展中，為共同體的命運做出明智的決定。

全書的佈局很有結構和層次性，分為四大部分，前後連貫並且互相呼應。第一部份以一張全班紀念照，點出年輕學子們的共同想望與教育問題；第二部份以科學眼光探討生命的根源，從而瞭解到基因遺傳型所提供的程式，近乎虛幻，也充滿隨機和無限的可能性，要讓孩子知道「努力有用論」，教育是為了協助他們解開人類之謎；第三部份藉助科學與數學這兩項工具，訓練孩子的智力，讓他們以最佳方式從事交流，以破除蒙昧主義之蠢行，改造個人與共同體的命運；第四部份如何運用前述工具的透徹清晰性，具體作為與方法，作者並親自下海示範—如何為公義奮戰，以決定真理能贏得勝利。

以「睡蓮方程式」為書名，看出作者的關懷所在，當今教學現場老師們所忽視的關鍵能力——培養孩子的數學感和直觀洞察力。這個饒富教育意義的睡蓮故事：當湖中種下一株睡蓮，它具有每天生出另一株睡蓮的遺傳特性（評按：等比級數增加），結果到第 30 天睡蓮子子孫孫將覆蓋滿整個湖面，最終所有的睡蓮會因為缺乏空間和營養，竟而窒息、死亡。

問題：「在第幾天時，睡蓮會覆蓋整個湖面的一半？」

多數中學生可能會回答：「15 天！」因為直覺地 30 天的一半是 15 天。然而，正確的答案是 29 天。為了強化認知衝突的威力，作者繼續追問：「在第幾天時，睡蓮會剛好覆蓋住 3% 以上的湖面？」只需從第 30 天逆向推算，第 29 天時 50%，第 28 天時 25%，第 27 天時 12.5%，第 26 天時 6.25%，第 25 天時 3.12%。作者接著用一幅漫畫來凸顯此番劇情，具有以圖像表徵直觀的震撼性效果。就在第二十五天時，一株憂心未來的睡蓮提醒同伴：

停止吧！看起來情況不妙噢！

同伴們似乎沒有聽進去：

才不呢！還剩 97% 呀！

但，錯了！不出一星期，大夥的大限就到了。

這個故事是全書當中最具有戲劇性和代表性的一個例子，最能傳達作者的教學理念，也運用了作者所認為的絕佳教學法：將孩子的思緒逼入死胡同→造成認知衝突→調整認知→瞭解到問題的本質。因此，對於這個主題教學，作者給老師們的忠告是：不該只是教會學生如何破解指數函數（或等比級數）成長的陷阱，而該讓學生體驗隱藏其後的爆炸性發展，如此學習才會深刻鞏固，從中也才能學會教訓！

至於書名的附標「學習科學的樂趣」，也符應作者的教學理念，不管是科學或數學的學習，首重能激發學生的學習動機。這個睡蓮故事的教學模式，由猜想開始，竟而終止於意料之外的驚奇效果！釣足了學生的胃口！

從全班紀念照開始，作者認為他所面對的國小中高年級以致於高中生，雖然經歷不同的文化洗禮，也各有條件與特色，但他們所提出的問題基本上沒有太大差異。共通點是，對即將加入的群體遊戲、社會生活，渴望有更多的瞭解，大體上都是關乎自己未來的議題。作者將之比喻成像是每學年結束前，班級所拍攝的紀念照一樣，差別愈來愈模糊。

另一方面，這張紀念照也拍出了共通性的問題。作者充分理解青少年的矛盾與苦悶，渴望被瞭解，卻又有所保留與遲疑。原本學校老師有可能是他們最知己的人，然而在現存教育體制下，老師成了制度下的「僕役」，他們則變成犧牲品。「為考試而學」、「為升學而學」是師生共同競逐的目標，學校被視為囤積知識的場域，而老師則是販售商，學生在還沒有食慾之前，腸胃早被各類食品撐飽，填鴨模式令人感到噁心！為了趕時間，老師通常規避了真正邏輯困難或隱含弔詭之處，而學生腦袋中真正留下的是一堆無用的死知識。

事實上，這也是部分台灣教育現場的寫照。雖然我們的 PISA、TIMSS 測驗成績亮眼，但一切以升學為主要導向的教學氣氛，仍然濃厚！令人憂心的是，部分老師往往棄守個人的專業判斷。例如近幾年升高中學測都是考選擇題，出版商基於商機，爭相投老師所好，有求必應！我們只要比對各縣市基層學校的段考試題，將會發現題目大同小異—因為多數出自出版商提供的題庫光碟；對於干預專業自主的「一綱一本」政策—政治霸權，則表現出奇的冷默！

作者對教育問題痛下針砭，但有破也有立。他認為理想的學校模式是，幫助孩子成為自己，培養他們獨立自主的能力，學習如何過群體生活和對自己負責。好的教學要能重拾孩子的信心，激發他們對活動探索的興趣，能捕捉令他們感動的契機。孩子的大腦會演變，是主動建構者，老師應該製造機會讓他們在活動中，可以組織和調配自己的理解力、想像力和聯想力。

思考某個錯誤所花的短短幾分鐘，要比起用幾個小時囫圇吞棗地學一些精準定理在腦中所印下的痕跡更為深刻。

因為，這是經歷了情意感動和內在省思所留下「我怎麼會讓自己被擺了一道？」的醒悟！

當受教者表現出的結果出乎其意料之外時，才是教學者應該感到驕傲的一刻。

科學以何種眼光看待孩子？從遺傳學、科學、教育、哲學以致於宗教，作者總是能交互參照印證，在當中找到彼此的關連和詮釋的方法，可以看出其思考的開闊性，以及所具有的深度和廣度。

動物的演化歷程近似，甚至體內的運作模式也一模一樣，我們都是星球的塵灰，和其他物種一樣，都是宇宙進程中一項暫時性的結果。而人比較獨特的地方是有意識的能力，不僅如此，人類也知道自己有這種意識能力。面對這個事實，科學至今仍無法解開謎團。有一種假說：某種來自他處的「能量」形式，或者說「靈魂」。科學家無從判定這個假說成立或不成立，甚至無法確切的定義或描述。作者選擇宗教，以回應這項不安的感受，從中得到安頓；另一方面，他也積極呼籲要把握這一世人生，活在當下。人類既由宇宙所創造，也該為改變宇宙而努力。

同樣地，他認為想瞭解孩子的現狀，就該回溯他既往的狀態，因為他現有能量是過去能量之延伸。這個新能量的產生，係來自個體間的交互作用，幸運的是所有個體都能從中受益。而教育的功能，即是在透過知識途徑，啟發孩子參與交流遊戲，在互動中可以形成新的力量，利用這個力量來解開宇宙之謎。

從遺傳學的研究體會，作者認為學校教育的功能，該讓孩子有均等的機會打造自己的聰明才智，當孩子都那麼在乎別人的眼光——「我好不好看？我聰不聰明？」教育者應該順勢利導，讓他們瞭解底下事實是非常重要的：

除非是病理現象，否則，他們的聰明才智永遠是他們自己努力發展所得的暫時性結果。這些努力的動機並非為了在強迫且幼稚的競爭中戰勝他人，而是要以一種自動自發、充沛旺盛的好勝心超越自己。

大自然在「基因型態」間設置了一道關連，即使父母親兩人都屬於 Rr 或 Nm (R 表示捲舌基因， r 表示不捲舌， N 表示健康基因，而 m 是疾病基因)，他們的孩子有可能是 rr 或 mm 。由於未能真正體會基因遺傳與外在遺傳特徵之間的差異——因為特徵未被遺傳，即使優秀的學生都可能因此擾亂了直覺。

之所以要促進孩子們的交流，就是要提供機會給他們打造自己——亦即成為優良的基因，如此共同體中健康的個體將會越來越多（評按：作者之隱喻）。此外，教育也須讓孩子理解最先進科技知識所帶來的問題，即使目前科學還無法更換有害的基因，但當有一天個體是由意志所產生（複製人成真），而非大自然的隨機孕育時，我們的孩子必須有足夠的智慧作選擇。作者說：

我所有演講的中心思想，即是每個孩子藉著與周遭人的牽連而脫胎換骨成為獨立個體的過程。因此，所有共同體的首要目標，便是幫助這些關連更容易形成。

很可惜！作者對於生命的論述，僅止於「此生」，積極性未有完備。佛教有

「無限生命」的觀點，亦即生命是無限相續的，前生之前還有前生，來生之後還有來生，這一刻也是一個暫時性的結果。但當我們接受這樣的生命意涵後，更願意努力，除了不會在生命即將退逝前，悲嘆「不管是好也好，壞也好，反正死了就算了，一了百了！」一事實上，不會一了百了。即使在生前，也比較不會淪為虛無的享樂主義者。誠然，無限的生命跟眼前有絕對的關係，我們所有的作為都會留下痕跡，都在為下一刻的相續作鋪路，以及為下一世作準備，所以應該時時儲備好的資糧。另外，在詮釋「為何有人是天才？」論題上，也比較自然合理。作者如果知道佛教有這項主張，猜想他也會欣然採納，因為他的種種理念唯獨欠缺「來世」的關懷。

瞭解了生命的真相後，我們將如何改變？當然！就需要靠環境和教育了。首先要如何啟發孩子參與交流？作者認為需要教會孩子善用工具與方法，具備嚴謹的科學態度，和激發他們探索的樂趣。他覺得數學之作為推理技巧工具，實在太有效了。可惜！在今天的教學現場被誤用為淘汰、篩選的工具，失去了它遊戲好玩的本質。更可悲的是，有時甚至被誤用、錯用了！

從《船長的年齡》之研究實驗顯示，多數孩子一看到數字就想到運算，極少數能洞察隱藏其中的量感，這是教學法不當和加法受到濫用所致。然而，數學之作為工具，不全然是危險的來源，有時還可能獲致意外的成功，譬如「兩平行線為另一直線所截，其內錯角相等」這樣簡單的概念，都可以當成人類窺探星球的鎖鑰。兩千多年前埃拉托塞尼就用它來推算地球的半徑，論證地球不是平的，甚至測量地球的體積。如此一來，數學就變成一種效用強大的創新工具。

誠然，要讓工具更精良、更創新，就得付出更大的努力——須透過內在途徑更抽象化才行。而這條路多半漫長、崎嶇，但作者提醒我們不要忘記真正的目標：

目前，為了考試合格而學習一些理論可能是有效的，但唯有當這些理論的解答能幫助我們思構周圍的現實世界時，我們學習所付出的心血才算有代價。可見，作者用心想讓學生有一種在生活中應用數學思維的習慣，這將使他們終身受益。

教育的目的，應該啟發學生具備創新的意識，強調過程意義的體驗和瞭解，而不是將學生制式化，死記公式或只會套用公式解題。作者很鼓勵製造認知衝突式的教學方法，利用邏輯阻礙時所受的衝擊是必要的手段，即使是弔詭或錯誤，卻也會促進思考。他說：

當顯然嚴謹的推理竟導出荒謬的結果時，思索錯誤何在永遠是一項有效的訓練。

此外，要洞察偽科學，就須培養嚴謹的態度，企圖利用一些符號堆砌或複雜的方程式或多次微分、積分，來掩飾觀念的貧瘠或嚇退批判者，都應該受到檢驗和批判。這種批判的態度不僅適用於在我們面臨偽科學時，更可以當作是自我行為的檢核標準。要學會批判，不是僅僅知道知識或理論的表象，更要能抓到關鍵、本質。頭腦體操是要訓練自己能突破格局，發散想法，勿固守在一種邏輯範圍內；除了理解和弄清楚題意，更須選擇正確的邏輯路徑；遇到阻礙時，要運用彈性和

反向思維能力，重新解讀。

在「態度」專章之末，作者統整全篇旨意，特別安排蘇格拉底（Socrates）與米諾（Meno）家一位奴隸的對話情節，以「求作一個正方形使其面積是已知正方形面積的兩倍」為例，說明只要用對教學方法，也可以對一位沒有知識，卻懂道理的奴隸，讓他掌握數學真理。誠如數學史家洪萬生所言，作者理應知道蘇格拉底「產婆式教學法」一產婆（比喻教師）只是協助產婦（比喻學生）生出嬰兒（知識），她並不是知識的傳送者，僅僅作了引導或啟發而已—在方法論上的侷限，這在學界已有定論；或許作者更想強調的是該方法本身的所帶來的啟發意義。

作者現身說法：

再怎麼精妙的概念，也可以在很早就介紹給青少年，這並非寄望他們瞭解所有精妙之處，而是為了啟發興趣，……有朝一日，等配備齊全後，便可以前往探險。

不帶有任何艱深的學術用語，他將「無限」、「相對論」等的概念，用遊戲般的方式介紹給孩子。其中，以方格型的街道圖說明實數與有理數的差別，再引導孩子進入「無限」所涉及的悖論；從畢氏定理開始，透過納入時間考量的旅行遊戲，帶出「狹義相對論」的趣味；此外，從費馬猜想到費馬大定理的發現故事，以致於哥德巴赫猜想，即使看似很簡單的數字，卻可能隱藏著不易論證或還未確定的關係。

一般中學教科書內容多數採用演繹的形式來呈現性質，普遍缺乏直觀、猜想能力的培養，這一小節顯現作者的用心良苦，他是想將科學與數學中最精彩、最生動的發現過程，展示給學生，用以激發學生學習的興趣，開闊他們的思路，為未來創造性的工作奠下基礎。這也是他對「學習動機理論」觀的堅持。

至此，歸納作者在數學教育改革上的訴求，以及身體力行所下的功夫，不外乎兩項核心—「培養數學感」與「診斷教學」。很令人讚嘆與佩服！因為這正是國內數學教育學者林福來等（1997）統整國內外有關數學教學的研究，認為培育數學師資的兩個主軸。其中數學感的目的著眼於數學思維的培養，要發展學生數學化及適當使用數學工具的能力，也就是建立對數學物件的感覺（Shoenfeld，1992）。例如對一個數學概念，能用不同的現象與表徵來說明其意義等。從上述兩個教學主軸便延伸出許多重要的教學概念，例如概念心像與概念定義、概念發展層次、概念的錯誤類型、數學概念的啟蒙例、診斷與認知衝突、引導發現式教學、探究式教學等（林福來等，1997、1998）。看得出來，這些教學概念作者也多數照顧到了。

智力訓練的最終目的，是要讓學生能加入議題討論的行列，但如何能在爭辯中論理有據、說服他人，作者運用科學與數學兩項利器，具體駁斥幾個最容易被誤解、混淆的問題。

種族是科學概念，但經由遺傳學的分析知道，人類沒有種族之分，因為各族群之間的差異不足以劃分出界線，所以抱持種族歧視無絲毫意義。要消除種族歧

視之偏見，並不容易，作者提出了有效的方法。我們該在教育上下功夫，首先對於這種蔑視他人的態度，要採取溝通，讓具有歧視傾向的孩子知道，他沒有恐懼的對象；再者，透過體驗學習一水的神秘特質、自由落體運動，讓孩子知道真相是什麼？最重要的是，要提升孩子的抽象思考能力，避免落入邏輯上的陷阱。例如：集合 A {2,6} 和集合 B {4,8} 它們並不相等，我們無法論斷哪個集合比較大？也就是說不相等僅僅意味著各別數字的大小，但並不適用於這兩個集合，因此，為它們劃分等級是不恰當的！

作者秉持一貫的批判精神，但絕不虛矯！誠如數學史家洪萬生所言，他不是一位虛無的犬儒主義者。面對孩子，他的態度開放，絕不形塑一言堂，為孩子洗腦，而是以尊重的態度和孩子對話，同理他們的感受。最重要的是，他的思考與公開立場一致，經常基於專業良知，以行動捍衛民主，或者為弱勢團體代言，對抗霸權！理論與實踐一致，這也是最令人折服的地方！

台灣近兩個月來，某些政治人物對原住民的言語羞辱與粗暴舉措，令人寒心！竟有總統候選人對著原住民說：「我把你們當人看，要好好教育你們！」；而元宵節當天，電視台一再播出北縣警察，強拆溪洲部落和三鶯部落違建的畫面，讓這些最弱勢的社會邊緣族群，在寒冬中頓失倚靠，無家可歸！雖然前者已經有正式道歉，但僅表示係「口誤」之失，流露出的優越的心態，仍令人難以放心！對比前不久，澳洲新任總理陸克文（20080213）對於過去數十年來，白人政府基於「原住民註定要步入滅絕」的偏見，而實施把原住民孩童從父母親手中搶走，放到白人家庭寄養的錯誤政策，提出官方的正式道歉。展現一個現代文明政府應有的作為！

作者對於我們從小所接受的「智力」與「基因」關係，以及有關「IQ 測驗」的種種論斷，做出相當嚴厲的批判。前者是當年研究者捏造數據的欺世盜名之作，接著有所謂「智力發展：80% 靠基因、20% 靠後天努力」的說法，作者運用數學和科學兩項工具加以駁斥。理由是使用「比例」這個詞，意味著所提及的這兩項因素是可以相加的；再以「逆風航行的帆船」為例，影響帆船航行的兩項因素—風力和水力，沒有哪一項比較重要，它們交互作用的結果，每一項因素都會因為另一項因素的作用而提升。所以簡單使用加法來詮釋「智力」與「基因」的關係，不但忽略了兩者互相影響的可能性會有多大，也是錯把「關連」混淆成「原因」，而孩子更可能因此成為「畢馬龍效應」的犧牲者。事實上，以目前科學水準，還無法全面掌握「智力」與「基因」之間錯綜複雜的關係。

另一方面，青少年所處的現實場域，迷信充斥，加上大多數媒體的推波助瀾，可謂「污染嚴重」。該如何教導他們破除這些蒙昧主義？以占星術迷惑人心為例，其觀點集中在可能性極低的巧合上，特別強調少數「特例」的發生，並且運用含混不清、模擬兩可的預言塑造宿命的氛圍。破解這些亂象的最佳策略，是藉助邏輯的理性思考。占星術是早期人類對自然的想像，透過科學知道，有些星座根本不存在，或者只是視覺的幻象而已，而星星的聚集也只是表面的假象。我們不能任由青少年迷信這些蠢事，因為負面的代價太大了，尤其接受「宿命論」的想法，

等於否定了人生的所有努力。

學校角色應該對抗這些蒙昧主義，教會學生積極的人生態度，台灣俗諺「愛拼才會贏」是最佳的註腳。此外，利用數學上的「鴿籠原理」也可以輕易破除這項邪說，試想以全世界人口推算，平均將有十多萬人係屬同一命格，這可能嗎？

作者最後語重心長指出：

遺傳學幫我體會到，將他人看成一種必須克服或消除的障礙，最後只會導致自己的滅絕。

遺傳學引導我走入另一條思路，它對我顯示他人是一處泉源，我可以利用汲取，藉以成為真我。

成人應該提供一個開闊的國度，在這裡每個青少年都像是帶來希望及熱誠寶藏的意外訪客，該受到禮遇接待！而不是像現今氛圍，整個社會無時無刻不再提供競爭，大家都在擠窄門，爲了功成名就，常必須明爭暗鬥，排擠他人。

總之，嚴格說來這不是一本純粹的數學科普著作，因爲有關數學的論述篇幅還不到三分之一。但它所具備的教育改革面向，科學與數學知識在方法論上的參照，以及數學教學概念在認知和情意上的展現，均頗具啓發性。另外，作者也爲我們開拓了科學與數學這兩項工具的視野，對於談「數學」色變的學生，或無法回答學生「數學有啥用？」的教師，都頗具參考價值。因此，值得關心教育的老師和社會人士研讀，或者也可以當作中學生的課外讀物。

本書譯筆流暢，可讀性很高。雖然筆者不懂法文，無法作法漢語對照，但感覺有一處的文字敘述難懂，提出來就教方家：

第 28 頁倒數第 3 行「如果沒有魔鬼，罪惡必然存在。」

比對中國的簡體字版爲「即使沒有魔鬼，那麼惡也是存在的。」兩者的語意有所不同，似乎後者的邏輯語法比較自然一些。