

店址：新北市立明德高中國中部數學科教學研究會
店長：涂佩瑜 老師
執行長：陳玉芬 老師
大掌櫃：汪嫻君
師傅群：黃筑芹

數食店月刊

第 66 期 103 年 3 月號

《九章算術》讀後淺談—認識『盈不足術』

潘漢文 老師

書本簡介

《九章算術》九卷，是現存最早的中國古代數學著作之一，《算經十書》中最重要的一種。其作者已不可考。一般認為它是經歷代各家的增補修訂，而逐漸成為現今定本的。根據研究，西漢的張蒼、耿壽昌曾經做過增補和整理，其時大體已成定本。最後在東漢前期之前成書，而其基本內容在東漢後期已然成型。¹

《九章算術》將書中的所有數學問題分為九大類，就是方田、粟米、衰分、少廣、商功、均輸、盈不足、方程、勾股等「九章」，分別九卷，共計 246 題 202 術。此書不但是漢代重要的數學著作，在中國和世界數學史上佔有重要的地位。作為中國古代數學的系統總結，對中國傳統數學的發展有了深遠的影響。

在西學東漸之前，《九章算術》是中國數學家的必修讀本。早在唐初，朝廷就將《九章算術》列為數學教科書，並尊為古代數學群經之首，「九章」兩字甚至成了中國數學的代名詞。《九章算術》在結構、敘述方式、算法和名詞術語等方面對後世起了示範作用，雖然數學在不斷發展，新內容層出不窮，但在古代中國，數學著作的框架仍遵循《九章算術》。

心得感想

筆者在閱讀第七卷『盈不足』的題目時，發現這類題目解法其實和二元一次聯立方程式的應用問題有相當多的關聯性。所謂的『盈不足』，是指同時有出現『盈』（多或多出）和『不足』（少或不夠）的數學應用問題。以第一題為例：

今有共買物，人出八，盈三；人出七，不足四。問人數、物價各幾何？

答曰：七人、物價五十三。

翻成白話文為：『有一群人想要共買一物，若每人出8錢，則會比物價多了3錢；若每人出7錢，則會比物價少了4錢。請問人數、物價分別是多少？答：人數有7人，物價53錢』。看起來是否很像在國中數學時，所學的一元一次方程式或是二元一次聯立方程式的應用問題呢？

而書中所提及的解法『盈不足術』其實就是這類問題的解法，只是這種解法不需假設未知數：

盈不足術曰：置所出率，盈、不足各居其下。令維乘所出率，并以為實。并盈、不足為法。實如法而一。盈不足相與同其買物者，置所出率，以少減多，餘，以約法、實。實為物價，法為人數。

以現代的數學術語解釋，可將題目翻成：『有若干人想要共買一物，若每人出 a_1 元，則會比物價多了 b_1 元；若每人出 a_2 元，則會比物價少了 b_2 元。請問人數、物價分別是多少？』，而其解法則為

『人數有 $\frac{b_1+b_2}{a_1-a_2}$ 人、物價為 $\frac{a_1b_2+a_2b_1}{a_1-a_2}$ 元』。為什麼可以這樣解出答案呢？讓我們來證明這個解法：

假設人數有 x 個人、物價為 y 元，則按照題意可列出二元一次聯立方程式

$$\begin{cases} a_1x - b_1 = y \cdots \cdots \textcircled{1} \\ a_2x + b_2 = y \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

¹引自《維基百科》、張復凱.《HPM 通訊第七卷第一期》。郭書春、劉鈍 (2001).《算經十書》，九章出版社。

$$\begin{aligned}
 &\text{將②的 } y = a_2x + b_2 \text{ 代入①的 } y \\
 &\text{得 } a_1x - b_1 = a_2x + b_2 \\
 &\Rightarrow a_1x - a_2x = b_1 + b_2 \\
 &\Rightarrow (a_1 - a_2)x = b_1 + b_2 \\
 &\Rightarrow x = \frac{b_1 + b_2}{a_1 - a_2} \dots\dots \text{③}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{再將③代入①的 } x \\
 &\text{得 } a_1 \left(\frac{b_1 + b_2}{a_1 - a_2} \right) - b_1 = y \\
 &\Rightarrow \frac{a_1(b_1 + b_2)}{a_1 - a_2} - \frac{b_1(a_1 - a_2)}{a_1 - a_2} = y \\
 &\Rightarrow y = \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{a_1 - a_2} \dots\dots \text{④}
 \end{aligned}$$

所以由③與④得知 $\begin{cases} x = \frac{b_1 + b_2}{a_1 - a_2} \\ y = \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{a_1 - a_2} \end{cases}$ 因此人數有 $\frac{b_1 + b_2}{a_1 - a_2}$ 人、物價為 $\frac{a_1b_2 + a_2b_1}{a_1 - a_2}$ 元

這種解法稱為『盈不足術』，是距今兩千年前左右的前人們，運用他們的智慧所得的公式解喔！在那個時代的中國，代數發展並沒有像現代一樣有一套完整的理論架構，所以他們能夠發明或發現這種不用假設未知數就能解的解法，真的是件非常不容易的事喔！不知讀者是否與筆者一樣，因為認識古人所遺留的不凡智慧知識，而對創造出它們的這群先輩們肅然起敬了呢？

接下來我們再看看下面一則有趣的文章，是關於唐朝拔擢官吏的故事，注意唐朝時的科舉制度並不盛行，主要還是以察舉、薦舉的方式來拔擢官吏，只有當官吏候選者們的背景、年資、能力、獎懲功過等等都相近時，才會用考試的方式進行最後的選拔：

青州楊尚書損，觀風陝郊日，政令頗肅。郡人戎校缺，必採于輿論而升陟之；縷及細胥賤卒，率用斯道。以是蒞政累載，無積薪歎燥請托之源。一日，使院有專兵籍者闕，局司頗重，選置惟難。有吏兩人，衆推合授，較其歲月職次功績違犯，無少差異者。從事掾不能決，請裁於長。長或臆斷，誰曰無私。楊公俛首久之，曰：「余得之矣。」乃謂曰：「為吏之最，孰先于書算耶？姑聽吾言：有夕道於叢林間者，聆羣跣評窮賄之數，且曰：『人六匹則長五匹，人七匹則短八匹。』不知幾人復幾匹？」顧主硯小吏著於紙，令俯階籌之。且曰：「先達者勝。」少頃，一吏果以狀先，遂授良闕，儕類則眙伏而退。以其類亥二首六身之說，故書。
—唐高彥休《闕史》

上文的故事大意为：在某日，青州這個地方想要拔擢縣吏遞補一個缺額，但是有兩名候選者，且兩人無論年資輩分、獎懲功過皆不相上下，所以最後縣官楊損決定利用『盈不足』的數學題目來進行測試、藉以篩選，讓最先解出來的那位候選者遞補缺額。

而這道題目是：「人六匹則長五匹，人七匹則短八匹。不知幾人復幾匹？」，白話文譯為：「若每人分六匹馬，會多出五匹馬；若每人分七匹馬，則不夠八匹馬。請問總共有幾個人以及幾匹馬？」

使用『盈不足術』解之，可得人數共有 $\frac{8+5}{7-6} = 13$ 人，馬匹共計 $\frac{6 \times 8 + 7 \times 5}{7-6} = 83$ 匹。

若不熟悉『盈不足術』，還是可以使用國中所學的二元一次聯立方程式來解這個題目：

假設總共有 x 個人， y 匹馬，則按題意可列出二元一次聯立方程式

$$\begin{cases} 6x + 5 = y \\ 7x - 8 = y \end{cases} \text{ 解之得 } \begin{cases} x = 13 \\ y = 83 \end{cases}, \text{ 所以答案為：總共 13 個人，83 匹馬。}$$

由上述題目不難發現，許多古代中國的數學題目和現代的中小學數學是可以相通的，而且多為生活應用問題，所以數學並不是沒有任何用處的喔！金代李冶《益古演段》亦云：「術數雖若六藝之末，而施之人事，則最為切務，故古之博雅君子馬鄭之流，未有不精于此者也。其撰著成書者，無慮百家，然皆以『九章』為祖。」

故在此鼓勵大家若有時間，除了勤練數學外，亦可閱讀一些中國古代的數學書籍，除了提升自己對文言文的閱讀素養外，也能從中增長新的知識見聞喔！

參考資料 1. 郭書春(2009). 《九章算術譯註》，上海古籍出版社。2. 紀志剛(2010). 《南北朝隋唐數學》，河北科學技術出版社。

數學週考風雲榜

單元 1-1 1-2				單元 1-3 2-1				單元 1-1			
班級	座號	姓名	成績	班級	座號	姓名	成績	班級	座號	姓名	成績
101	1	任治樺	97	101	1	任治樺	105 96	201	2	林學謙	95
	8	邱繼泓	100 100		2	李俯曆	105		16	李佳靜	100
	10	張友芄	95 95		4	李彥嶽	98		17	林季蓁	100
	20	張琬祺	100 95		6	林易璿	105		21	陳柔柔	100
	22	黃珊	95		8	邱繼泓	100 100	202	4	李家丞	95
	28	黃鳳儀	100		9	侯凱恩	96		6	張新燦	95
102	3	呂銘席	95		20	張琬祺	105 100	204	9	陳溫其	100
	8	陳家豪	95		26	陳穎毅	96		13	李沛彤	100
	12	管政霖	100		28	黃鳳儀	104		14	李佳穎	100
	18	洪儀恩	95	102	1	王承彥	105		17	陳柔宜	100
	21	陳潔宜	95		5	林泓諭	96		20	黃婷婷	95
	29	嚴狷峰	95		8	陳家豪	96		25	王皓平	100
103	1	朱崇華	100		12	管政霖	105 96		29	楊宥伶	95
	15	汪佩君	100		17	林佳陵	105 100		30	廖奕婷	100
	16	郡立瑜	100		18	洪儀恩	105	208	6	陳俊傑	100
	19	陳旻	95		22	劉芊妤	96		7	陳琪祥	100
	24	黃筱仔	95		27	劉祥宏	105		8	陳蓬元	100
104	17	張巧羚	100		29	嚴狷峰	105 96		13	蕭宇佑	95
	18	許閔綉	100	103	1	朱崇華	100 105		19	李玟均	100
105	7	黃品竣	100 100		8	陳圻昱	105		26	戴仔亭	98
	11	葉家瑋	100		13	魏啟峻	110		27	呂承軒	95
	26	潘昱潔	100		15	汪佩君	100		32	林芷伶	100
	31	林珈卉	100		16	郡立瑜	100 98	209	4	周文斌	95
106	10	陳思瑋	95		18	陳心怡	96		7	陳嘉興	100
	15	李文媛	95		19	陳旻	97 105		10	廖偉丞	95
108	20	許子潔	100		21	陳靖蓉	105		15	李意如	95
	24	黃鳳娥	100		26	辛義賢	105		20	陳巧翊	100
109	17	王湘晴	100		31	陳采逸	105		23	楊佳芯	95
	19	邱好錚	95	106	1	呂尚豫	105	單元 1-1 1-2			
111	19	康凱浚	97		6	林晟詳	103	303	9	黃業桑	95
307	2	林亮均	95		8	柯仁傑	105	305	25	盧伯華	100
	9	王鈺媿	100 95		10	陳思瑋	110 96	306	4	許智豪	95
	22	許右宏	95		14	鄭嘉銘	105		15	范于庭	100
310	2	呂奕成	95		18	陳雯馨	105 96		19	劉曉芸	95 100
	4	張旭里	95		19	陳筱穎	105		26	羅祥豪	100
	17	曾馨慧	95		20	游亞辰	101 100	309	13	林佳靜	95
	21	鄭亦珊	100 100		30	林彥均	105 96		15	徐艾琳	100

「九章算術」趣解

配合本月主題，我們編輯部也呼應一下同學們現在學習階段的相對應能力，擷取了「九章算術」中部份趣題，至於題意能懂多少？相信只要靜下心來，以同學們的聰明才智這不是問題，加油！也許就是本次的段考題哦！也歡迎同學將它的解答寫於下面的空白處投入信箱。

另外，「九章算術」中的題目主要反映出在當時社會的生活形態下，人們所面臨而又必須要解決的問題，現在我們也希望透過這樣的方式，同學們能不能也設計與上面所對應的題目相類似，而又能反映出我們現在生活形態的數學題目呢？請將它寫於最下方的空白處，也投入信箱，要記得附上你的解答哦，若經採用必有重賞！

若同學有興趣，數學老師已將相關題目放在本校數學科網站上，歡迎上網瀏覽並解題。

<p>九章算術經卷第七 盈不足章。</p> <p>今有共買雞，人出九，盈一十一；人出六，不足十六。問：人數、雞價各幾何？</p> <p>答曰：九人，雞價七十。</p>	<p>九章算術經卷第八 方程章。</p> <p>今有上禾五秉，損實一斗一升，當下禾七秉；上禾七秉，損實二斗五升，當下禾五秉。問：上、下禾實一秉各幾何？</p> <p>答曰：上禾一秉五升，下禾一秉二升。</p>	<p>九章算術經卷第九 句股章。</p> <p>今有句五步，股十二步。問：句中容方幾何？</p> <p>答曰：方三步一十七分步之九。</p>
<p>正解</p>	<p>正解</p>	<p>正解</p>
<p>生活創新題</p> <p>(空間不夠可自備紙張)</p> <p>班級： 姓名：</p>	<p>生活創新題</p> <p>(空間不夠可自備紙張)</p> <p>班級： 姓名：</p>	<p>生活創新題</p> <p>(空間不夠可自備紙張)</p> <p>班級： 姓名：</p>

【邏輯推理遊戲】

Q1 三個邏輯學家進入了一間學校，老師問：你們都要上課嗎？

三人依序回答

1. A: 不知道...

2. B: 不知道...

3. C: 不知道...

請問 A, B, C 中誰一定是冒牌貨？



Q2 三胞胎正在罰站被問話，因為媽媽心愛的花瓶被打破了，

爸爸說他吃午飯前看到花瓶還好好的，吃完午飯後就看到已經破了；

大寶說：『⁽¹⁾打破花瓶的不是我！』

『⁽²⁾我早上出門，下午才回到家的。』

二寶說：『⁽³⁾我今天整天都在家裡。』

『⁽⁴⁾但是打破花瓶的不是我。』

三寶說：『⁽⁵⁾打破花瓶的人中午一定在家。』

『⁽⁶⁾我早就出門了，中午過後才回來的』



媽媽知道一定是三兄弟其中之一做的，

但從他們咕溜溜轉的眼睛就知道他們沒有完全說實話，

只好再去問一定會說實話的爸爸，

爸爸很確定一個孩子一大早就出門下午才回來，剩下兩個孩子整天都在家，

不過是哪個孩子出門他沒看清楚；

最後，媽媽發現三兄弟說的六句話中只有兩句是實話，

請問，打破花瓶的到底是誰呢？

Q3 有兩位女士，小美和小可，還有兩位先生，小名和小一，他們四人都是運動員。其中一

位是游泳選手，一位是滑冰選手，一位是體操選手，一位是網球選手。有一天，他們圍著一張方桌而坐：

(1) 游泳選手坐在小美的左邊。

(2) 體操選手坐在小名的對面。

(3) 小可和小一相鄰而坐。

(4) 有一位女士坐在滑冰選手的左邊。

請問誰是網球選手？



數學下午茶時間

7		1	2					9
				8		7		
	2				4		3	8
5				7		9		
	1			4			8	
		8		2				6
1			5				6	
		7		1				
2	5				6	4		1

		7				1	5	
		3		9				2
	9		7		8			
	3		4					6
	6		5		3		4	
7					1		8	
			2		6		9	
9				7		3		
	2	4				7		

班級：_____ 姓名：_____ 班級：_____ 姓名：_____

【數學古詩欣賞】

長十六，闊十五；不多不少恰一畝。²
 內有八個古墳墓³；更有一條十字路。
 每個墓，周六步，十字路，闊一步。
 每畝價銀二兩五，除了墓，除了路，問君該剩多少數？

請依題意，畫出此題所描述的圖形，並求解。

——程大位原著，梅穀成《增刪算法統宗》

【數學古詩欣賞圖解與題解】

【邏輯推理遊戲】

(除了答案，請儘可能詳述論證)

班級：_____ 姓名：_____

班級：_____ 姓名：_____

² 1 畝 = 240(方步)

³ 這裡的古墳墓都是圓形，表示有 8 個相同面積的圓形墳墓。

