

店址：新北市立明德高中國中部數學科教學研究會  
 店長：涂佩瑜 老師  
 執行長：陳玉芬 老師  
 大掌櫃：汪嫻君  
 師傅群：黃筑芹

# 數食店月刊

第 64 期 102 年 11 月號

## 「大衍求一術」在國中階段的應用

陳玉芬 老師

『大衍求一術』這個名詞的確陌生，暫先不談它的來由，先舉個例子來說明吧！

在國一上的第二單元「最大公因數與最小公倍數」中，我們總會看到一些所謂的「經典題」：

蘋果一堆不知總共有幾顆？只知道每 8 個一數會餘 6，每 9 個一數會餘 7，每 15 個一數會餘 13，則這堆蘋果至少有幾顆？

這樣的題目，幾乎每位國中生都能解：

$$[8, 9, 15]=360 \quad 360-2=358 \quad \text{答：蘋果至少 358 顆。}$$

但是，隨即問題來了，總是會有愛思考的學生問：如果每個餘數與除數之間，彼此並沒有共同的關係呢（以上題為例，它們的餘數與除數之間皆不足 2）？老師說：一言以蔽之——那樣的題目等上了高中自然有辦法解了！雖然也是事實，但這樣的答案總覺得既無法滿足學生的好奇心，更無法滿足學生的求知慾。

這時『大衍求一術』或許可以拿來和學生共同思考討論一下，至少可以滿足學生的好奇心。今，再引自一個「經典題」來說明：

今有物，不知其數。三、三數之，賸二；五、五數之，賸三；七、七數之，賸二。問物幾何？

在這道題中，餘數分別是 2、3、2，不足數分別是 1、3、5 都缺少共通性，顯然無法在國中階段處理，但又常是國中老師常會面臨到的問題，不過我們先以我們熟悉的方式討論此題解法。根據題意，

我們可以列出右式：某數  $x = 3m + 2 = 5n + 3 = 7p + 2$

所以 令  $3m + 2 = 5n + 3 \implies 15k + 8 \rightarrow 15k + 8 = 7p + 2 \implies 105r + 23$ ，得此物至少 23 個。

現在，且將鏡頭拉回到南宋（大約 1247 年左右）時期，數學家秦九韶是如此解的：

<table style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px;"> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center; border: 1px solid black; border-radius: 50%; border-width: 2px;">1</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">2</td></tr> </table>	1	1	0	2	<table style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px;"> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center; border: 1px solid black; border-radius: 50%; border-width: 2px;">1</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">5</td></tr> </table>	1	1	0	5	<table style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px;"> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center; border: 1px solid black; border-radius: 50%; border-width: 2px;">1</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">7</td></tr> </table>	1	1	0	7
1	1													
0	2													
1	1													
0	5													
1	1													
0	7													

因為右上方均為 1 了，所以可列出式子為  $x = 2 \times 35 + 3 \times 21 + 2 \times 15 - 105 \times 2 = 233 - 210 = 23$

如此的解法過程，我們稱之為「大衍求一術」。<sup>1</sup>（縱使學生不知為何，但看到如此計算方式，且答案又相符時，學生已嘆為觀止了）。此時，多少能引起學生的好奇問一下：老師，為什麼？

**因為** ①  $35\alpha \times 2 \equiv 2 \pmod{3}$  ②  $21\beta \times 3 \equiv 3 \pmod{5}$  ③  $15\gamma \times 2 \equiv 2 \pmod{7}$

<sup>1</sup> 「衍」通「演」；「求一術」指找出餘數為 1 的最小公倍數的方法。所以「大衍」，可說是演天地之變。大衍之數，就是推演天地萬事萬物用的數，在此可泛指在將數字演算求至 1 過程的方法。

所以，式子  $35\alpha \times 2 + 21\beta \times 3 + 15\gamma \times 2$  是可以滿足此題意條件，亦可改寫成右列的式子：

$$\begin{cases} 35\alpha \times 2 + 21\beta \times 3 + 15\gamma \times 2 \equiv 2 \pmod{3} \\ 35\alpha \times 2 + 21\beta \times 3 + 15\gamma \times 2 \equiv 3 \pmod{5} \\ 35\alpha \times 2 + 21\beta \times 3 + 15\gamma \times 2 \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

接下來做如下思考：

- (1) 先考慮被3除餘1且又能被5、7整除的數，那將得到70這個數。
- (2) 接著考慮被5除餘1且又能被3、7整除的數，那將得到21這個數。
- (3) 最後考慮被7除餘1且又能被3、5整除的數，那將得到15這個數。
- (4) 因為題目中某數被3除餘2，所以  $70 \times 2 = 140$ ；被5除餘3，所以  $21 \times 3 = 63$ ；被7除餘2，所以  $15 \times 2 = 30$
- (5)  $140 + 63 + 30 = 233$        $233 - [3, 5, 7] \times 2 = 23$       答：至少23個。

現在我們再舉一例來熟練這樣的方法。題目如下：

蘋果一堆不知總共有幾顆？只知道每3個一數會餘2，每5個一數也會餘2，每7個一數會餘3，請問這堆蘋果至少有幾顆？

- ①  $[5, 7] = 35$ ,  $35 \times 2 = 70$ ，70被3除餘1，所以得第一數為70。<sup>2</sup>
- ②  $[3, 7] = 21$ , 21被5除餘1，所以得第二數為21。
- ③  $[3, 5] = 15$ , 15被7除餘1，所以得第三數為15。
- ④  $70 \times 2 + 21 \times 2 + 15 \times 3 = 227$        $227 - 105 \times 2 = 17$       答：至少17個。

因此，所謂「大衍求一術」，就是指求一整數  $\alpha$ ，使其滿足  $G \times \alpha \equiv 1 \pmod{m}$  的方法，其中  $m$ 、 $G$  在大衍求一術中是給定的互質自然數， $m$  稱為「定母」， $G$  稱為「衍數」，而  $\alpha$  為「乘率」。如果  $m < G$ ，則先以  $m$  除  $G$ ，得餘數  $G_1$  (古書稱此為「奇數」)，然後求整數  $\alpha$ ，使其滿足  $G_1 \times \alpha \equiv 1 \pmod{m}$ 。

在針對「物不知數題」而言，所謂的「定母」是指3，5，7；「衍母」是指105；「衍數」是指35，21，15。整個運算過程說明如下：

「運算開始時於右上、右下分別填上  $G_1$  和  $m$ ，然後於左上、左下分別填上1和0。運算時把右上、右下兩數輾轉相除，同時把除得的商數與左上、左下兩數輪流增乘，直至右上數變成1為止，此時左上數即為所求之乘率  $\alpha$ 。」

當然以上述二題言之，尚無法窺見「大衍求一術」之奧，因為乘率  $\alpha$  過易於取得，今再舉一例說明

【例】 $3800\alpha \equiv 1 \pmod{27}$ ，求乘率  $\alpha$

$G = 3800 > 27$ ，所以先以  $m$  除  $G$ ，得餘數  $G_1$  為20，故式子可改寫為  $20\alpha \equiv 1 \pmod{27}$

(1) 

1	20
0	27

 (2) 

1	20
1	7

 (3) 

3	6
1	7

 (4) 

3	6
4	1

 (5) 

23	1
4	1


- (1) 依規定排列
- (2) 將(1)式中，以20除27，得商數1及餘數7。把7填入右下，並將  $1 \times 1 + 0 = 1$  填入左下。
- (3) 以7除20得商數2及餘數6。把6填入右上  $2 \times 1 + 1 = 3$  並將填入左上。
- (4) 以6除7，得商數1及餘數1。把1填入右下，並將  $1 \times 3 + 1 = 4$  填入左下
- (5) 以1除6，得商數5及餘數1。把1填入右上，並將  $5 \times 4 + 3 = 23$  填入左上

在(5)方格左上方的值23即為我們要求的乘率  $\alpha = 23$ ，即  $3800 \times 23 \div 27$  餘數為1。

限於篇幅關係，「大衍求一術」，就是先求出餘數為1的乘率，然後再依題意若餘數為2，再將衍數乘以2，以此類推。這樣的方式與「輾轉相除法」以及「中國餘數定理」是可相呼應的，有機會再聊。

<sup>2</sup> 此題若直接選用35亦可，因為35被3除正好餘2，只是此法原則是先找餘數為1的數。

## 數學週考風雲

單元 1-4 1-5				單元 2-3				編者的話
班級	座號	姓名	成績	班級	座號	姓名	成績	1. 因為 <b>稿擠</b> ，所以我們只能登記成績達 95 分以上的同學，但這也表示同學們的成績愈來愈進步了，希望能上榜的同學愈來愈多，我們也將在期末，頒發禮物給曝光率最多的前十名哦，所以請趕快將你的榮譽記載於「 <b>數學札記</b> 」中吧！ 2. 因為三年級的學長姐考的是全冊複習考，所以分數取到 90 分以上，唸書真的很辛苦，加油！ 3. 編輯部特別在此表揚： 208 張昊翔 陳琪祥 陳蓬元 209 陳巧翊 306 劉曉芸 309 徐艾琳 這些同學幾乎每次的考試都能榜上有名，真的好優秀，希望同學們能多多向他們學習！ 
103	1	朱崇華	95 100	202	4	李家丞	104	
	13	魏啟峻	100	209	15	李意如	95	
	15	汪佩君	100		20	陳巧翊	104	
	19	陳旻	100		31	謝宗翰	94	
	23	黃筑芹	95	<b>單元 2-1 2-2</b>				
108	6	洪喆	95	306	19	劉曉芸	95	
	32	白京陵	95	309	15	徐艾琳	100 95	
<b>單元 2-1 2-2</b>					20	林廣諺	96	
101	21	張琬祺	97 100	307	21	林佳弘	95	
102	1	王承彥	97 95		16	黃瑋亭	100	
103	16	邵立瑜	99	311	17	張明暄	95	
106	8	柯仁傑	95		22	高聖庭	100	
	18	陳雯馨	95	<b>單元 2-3 3-1</b>				
108	32	白京陵	97	208	8	陳琪祥	104	
110	3	李育濬	100		9	陳蓬元	99	
	18	呂靖琳	97		27	戴仔亭	99	
<b>單元 2-1 2-2</b>					33	林芷伶	99	
208	6	張昊翔	96 95	<b>第三冊 1-2 章 3-4 章</b>				
	8	陳琪祥	100	306	4	許智豪	90	
	9	陳蓬元	100		15	范于庭	90	
	13	鄭嘉豪	95		19	劉曉芸	90 102	
209	20	陳巧翊	96	309	14	林欣彤	96	
<b>第三冊 1-2 章 3-4 章</b>					15	徐艾琳	96 102	
310	21	鄭亦珊	102	310	18	詹琬綺	90	

# 第7屆數學週即將開鑼！

為期一週的「明德數學週」即將於下一週（12/9-13）星期一～五熱鬧展開，為讓同學們能踴躍參加，並能獲得各項競賽的最高成績，現在就為大家介紹主要競賽內容及競賽須知。

**闖關時間：**12/9~12/13

**闖關地點：**如雅樓三樓。

**闖關類別：**12/9~12/12 為團體組分組競賽時間，全班務必要參加，且每關都須蓋到章才能進入排名。

12/13（五）上午第 3 節聯課時間為中一個人預約賽，第 4 節聯課時間為中二個人預約賽，未登記預約者，取消得獎資格。

12/13（五）下午為校際盃的闖關比賽。

此次活動，有團體獎，也有個人全能獎，也有單項才能獎，獎品多到「獎」不完！

### 團體競賽須知

1. 每班分成五組，在指定的數學課時間到達闖關現場，每關最多十五分鐘，二分鐘時間換場，每組一份闖關手冊，遺失自行負責不補發。
2. 各闖關活動各組須於比賽活動時間內完成。
3. 請於活動完一週內上網填寫回饋問卷。
4. 活動完成後組長請將闖關手冊先交給現場負責登記闖關成績的關主，待成績登錄完成後將手冊領回完成手冊內的學習單，並於一週內交回各任課數學老師手中。

### 個人競賽須知

1. 請同學依照指定的預約時間抵達闖關現場，每關最多八分鐘，因每人皆已排定固定時間，遲到將取消資格，並請依序闖關，違者取消參賽資格。
2. 每關皆須闖過。其餘規定與團體競賽相同。
3. 欲參加個人賽同學請務必與各班的數學老師確認登記。

### 第一關 數學競試

在這一關中，你將會看到既熟悉又陌生的數學題目，讓你的腦力大激盪，你也可以挑戰 AMC、奧林匹亞、推甄題…等各類競賽試題。

### 第二關 數學按按按

今年數學老師們特地於本關為同學們設計了電腦互動的數學遊戲，不論是中一或中二，相信都讓你驚呼連連，內容簡述如下：

	團體賽	個人賽
中一	尋找 Mr. 普萊姆（質數）基礎版 數言數語：根據題示，找出符合意義的數學專有名詞	尋找 Mr. 普萊姆（質數）進階版
中二	尋找 Ms. 史葵兒（平方數）、畢氏三元組 我說你猜：讓隊友猜出你所表達的意思是哪一個數學專有名詞 數獨	計算畢氏樹的面積與周長，此外還有根號棋哦！

請同學務必要有耐心，因為每道題目都是由淺至深，所以要解出正確答案才能進入下一關哦！

### 第三關 明德密碼師

這也是今年數學老師為同學們新開發的電子互動數學遊戲，同學們只要學會質因數分解與線型函數，就能完成駭客任務，緊張又刺激！

### 第四關 數學 DIY

1. 中一同學利用七巧板在限定時間內完成老師指定的圖形
2. 中二同學則利用老師們準備的壓克力板，完成畢氏定理圖形的證明。此外，只要你有能力，還可以挑戰多種的多面體拼組。

### 第五關 行動數學

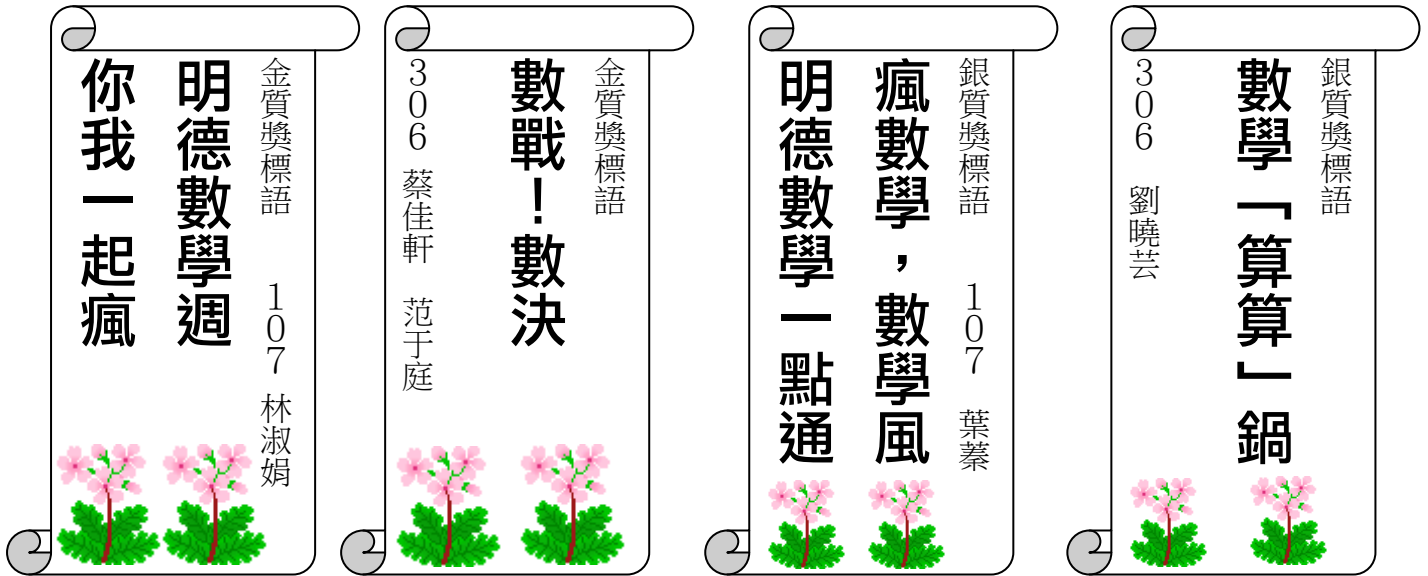
中一：闖關活動的空間是在一個正六面體的展開圖上。依照卡片上的座標完成指定動作。若最後到達的位置所看到的地上圖案，與所選取卡號中，指定的圖案相符合，即表示闖關成功。

中二：今年的數學老師又精心設計了一個有趣活動，同學們只要運用放大縮小圖的概念，全班即可合力完成一項不可能的任務！

說了這麼多，最重要的就是要記得「向各班的數學老師領取數學闖關手冊」哦！

# 明德數學週 創意新標語出爐囉!

經過一個月來同學們的腦力激盪，果然證明明德學生創意無限，數學老師們更特地為這些才華洋溢的同學們開了一次數學科教學研究會，討論今年的金質標語獎落誰家？最後限於學校經費有限，老師們也只能忍痛割愛選出下列四位幸運得主，將於數學週活動後舉行頒獎典禮，其他的同學，我們就明年見囉！



編輯部溫馨提醒

1	6			8				9
		3				7	5	
		8	5		2			
6		4			5			
	5		6	9	4		7	
			1			5		6
			7		3	6		
	7	6				4		
5				4			9	7

明德數學週將於 12/9-13 日

上午十點準時開鑼

敬請熱切期待!

請與數學老師保持密切聯繫!

祝各位同學闖關順利!

\_\_\_\_\_年 \_\_\_\_\_班 姓名: \_\_\_\_\_

