

淺談數列與級數

朱志竣 老師

最近國中二年級下學期數學課本第一章正在介紹「等差數列」與「等差級數」，所以利用月刊再介紹幾個不一樣的數列，供讀者分享。

§ A 有趣的、特殊的數列與級數

1	2	3	4	5	6	7	p	n
2	4	6	8	10	12	14	2p	2n
3	6	9	12	15	18	21	3p	3n
4	8	12	16	20	24	28	4p	4n
5	10	15	20	25	30	35	5p	5n
6	12	18	24	30	36	42	6p	6n
7	14	21	28	35	42	49	7p	7n
...											
p	2p	3p	4p	5p	6p	7p	p ²	pn
...											
n	2n	3n	4n	5n	6n	7n	pn	n ²
...										

在上列圖表中可發現

又可發現

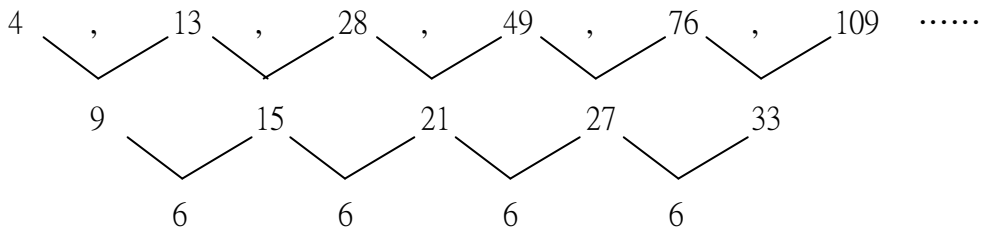
$1 = 1^2$ $1 + 2 + 2 + 4 = 3^2 = (1 + 2)^2$ $1 + 2 + 3 + 2 + 4 + 6 + 3 + 6 + 9 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$	$1 = 1^3$ $2 + 4 + 2 = 2^3$ $3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 3^3$
請繼續觀察比較，右列的推論是否正確？ $\rightarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$	

§ B 若數列可以寫成 $an^2 + bn + c$ 的形式，則：

n	$an^2 + bn + c$			
1	$a + b + c$	\swarrow	$3a + b$	\swarrow $2a$
2	$4a + 2b + c$	\swarrow	$5a + b$	\swarrow $2a$
3	$9a + 3b + c$	\swarrow	$7a + b$	\swarrow $2a$
4	$16a + 4b + c$	\swarrow	$9a + b$	\swarrow
5	$25a + 5b + c$	\swarrow		
...				
n	$an^2 + bn + c$			

如果能利用所給的條件求出 a、b、c 三數，不難推出第 n 項 $an^2 + bn + c$ 為何。

(1)



請求出第 n 項 $an^2 + bn + c$ 為何?

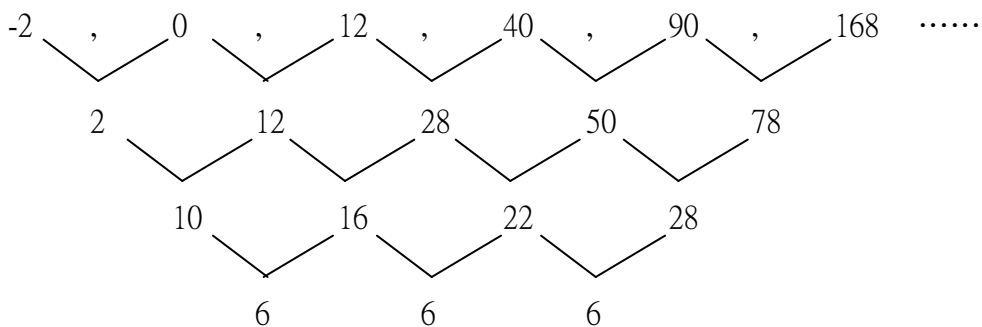
(2) 1,10,23,40,61,86,.....

§ C 若數列可以寫成 $an^3 + bn^2 + cn + d$ 的形式，則：

n	$an^3 + bn^2 + cn + d$				
1	$a + b + c + d$	\swarrow	$7a + 3b + c$	\swarrow	$12a + 2b$
2	$8a + 4b + 2c + d$	\swarrow	$19a + 5b + c$	\swarrow	$18a + 2b$
3	$27a + 9b + 3c + d$	\swarrow	$37a + 7b + c$	\swarrow	$22a + 2b$
4	$64a + 16b + 4c + d$	\swarrow	$61a + 9b + c$	\swarrow	
5	$125a + 25b + 5c + d$	\swarrow		\swarrow	
...					
n	$an^3 + bn^2 + cn + d$				

如果能利用所給的條件求出 a 、 b 、 c 三數，不難推出第 n 項 $an^3 + bn^2 + cn + d$ 為何。

(1)



請求出第 n 項 $an^3 + bn^2 + cn + d$ 為何?

(2) 1,4,10,20,35,56,.....



等比級數

因為課本已經將等差級數介紹得非常詳盡，所以介紹一下「等比級數」

如： $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 64 + 128 =$

令 $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 \dots\dots\dots$ ①式






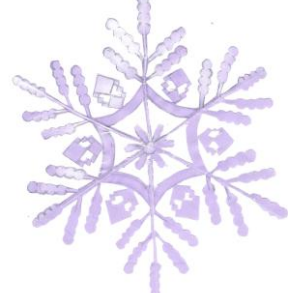

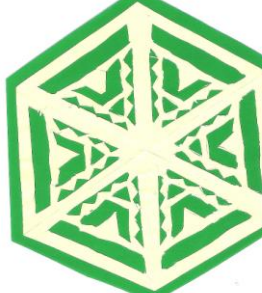
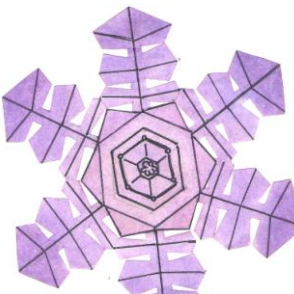
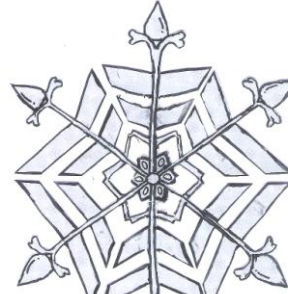
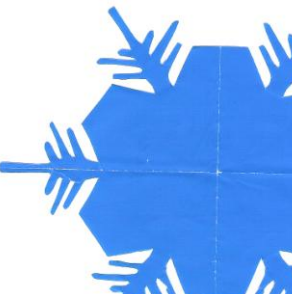
①式 $\times 2$ 可得 $2S = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 \dots\dots\dots$ ②式

將②式-①式得 $S = 256 - 1 = 255$

也就是說：一些依順序排列的數（稱為數列），其後項比前項的比值為一個定值（稱為公比），我們就把這些有順序的數（數列）叫做等比數列，而將這些有順序的數相加就叫做等比級數。

練習題： $1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 729 + 2187 =$

學生園地

			
201 呂祈宏 主題：繁花	201 呂沂庭 主題：算術	211 高聖庭 主題：光	202 黃齡儀 主題：雪花
			
202 黃齡儀 主題：雪花	202 陳研雅 主題：雪花	202 陳研雅 主題：雪花	202 陳暉菡 主題：雪花
			
202 陳暉菡 主題：雪花	202 陳暉菡 主題：雪花	204 黃瑋亭 主題：雪花	

若同學們仔細觀察，將發現雪花主題的同學們，是先將預設的圖形利用對稱概念描於紙上，然後再套上色紙予以美化，使圖形既增加美觀又能更熟悉對稱的意義，是不是真的很棒呢？如果同學有興趣，歡迎自行創作後投稿至本編輯部。

凡有刊登在月刊上作品的同學，請至編輯部領取一份精美下午茶，且務必要將你的榮譽寫在『明德數人』札記上，每學期結束由數學老師提報嘉獎名單。此外，待畢業時數學老師還會送記錄最完整的同學們畢業禮物哦！

猜個數學老師會出的段考題吧

不論你是中一、中二、或中三，能否在第二段考前整理一下這次考試範圍的重點，然後找出或設計一題你認為的二段的必考題，投到編輯部來，只要概念相同，我們就會贈送一份精美下午茶一份哦！



班級： 姓名：

數學週考風雲榜

單元 1-2 1-3				單元 2-1 2-2				單元 1-2 1-3			
班級	座號	姓名	成績	班級	座號	姓名	成績	班級	座號	姓名	成績
101	11	黃勝原	95	201	3	呂祈宏	95	302	15	張澄澄	100
	17	李佳靜	98		16	呂沂庭	100		21	鄭詠欣	97
	22	陳柔柔	95		22	黃郁純	95	303	8	黃啓倫	96
102	6	張新燦	95		28	陳玉穎	100	304	4	陳俊嘉	96
	7	張泓碩	98	206	2	林岱泓	105		7	曾喜彬	100
	24	傅韋翔	100		6	許智豪	95		18	廖文秀	99
103	1	任治諺	99 98		16	范于庭	90 95		22	吳旻諺	95
	3	江立弘	100		21	劉曉芸	105		28	顏嘉佑	100
	17	呂靜玟	95 95	207	10	王鈺媿	105	306	2	呂承恩	96
	24	廖惟涓	95		21	林佳弘	100		3	宋世傑	100
	33	林彥琦	100		25	黃俊霖	95		11	鄭博鴻	100 96
104	14	李沛彤	97	209	14	林欣彤	95		12	吳少君	100
	25	王皓平	95		15	徐艾琳	105		17	施禹安	97 98
	33	廖奕婷	100		17	曹育臻	105	311	3	李應昇	96
105	9	陳冠儒	100		20	林廣諺	95		4	林家誠	100
	18	張亦萱	95	210	4	張旭里	95		5	林煒傑	100
106	7	周君豪	95		18	詹琬綺	95		7	陳孝文	100
107	13	鄧紹廷	100	211	3	陳友峻	95	109	18	陳巧翊	95 100
	15	王珮誼	95		7	楊欽孟	95	110	4	孫智閔	100 100
108	6	張昊翔	100		22	高聖庭	100		10	黃士軒	95
	7	陳俊傑	100 100	108	16	羅正廷	95		13	劉振嘉	100 100
	8	陳琪祥	100		19	李玟均	98		15	李宜潔	100
	9	陳蓬元	95 100		23	趙立媛	100		18	洪于涵	95
	11	黃丞彥	95		26	呂承軒	99		25	杜承祐	95
	12	鄭皓瑋	95		33	林芷伶	95		31	辛芷妍	100

前期答對同學名單

注意：名字旁的數字表示你答對的題數，也是你可以來領取下午茶的分數！

305 陳柏翰x5	303 林豆豆x6	309 王光宗x6	305 陳家擘x4	311 陳筱芸x7	307 黃柏祥x3	104 班李沛彤x2
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	------------

※ 編輯部聲明

1. 每期都有適合各年級同學的程度，希望同學們針對自己的實力誠實地全力以赴，如此獲獎才有意義！
2. 由於同學們實力愈來愈堅強，故上榜標準已從 90 分提升為 95 分，希望同學們再接再勵！
3. 別忘了，要將你的記錄登記於『明德數人』札記中哦！

致歉啓事

本編輯部因使用倉頡打字之故，常將本刊忠實讀者曾「喜」彬同學誤植為曾「嘉」彬，今盼曾同學見報後，能至本編輯部領份精美小禮物同時本部願贈閱一年期「數食店月刊」以表誠意。

請觀察下列數列，並試著說出其規律。

第 n 項

- (1) 2, 4, 6, 8, 10, _____, _____, , _____
- (2) 3, 6, 9, 12, 15, _____, _____, , _____
- (3) 2, 4, 8, 16, 32, _____, _____, , _____
- (4) 1, 3, 9, 27, 81, _____, _____, , _____
- (5) 1, 4, 9, 16, 25, _____, _____, , _____
- (6) 1, 3, 6, 10, 15, _____, _____, , _____
- (7) 1, 8, 27, 64, 125, _____, _____, , _____

請觀察下列數列，並試著說出其規律。

- (1) 2, 6, 10, 14, __, __, __, __
- (2) 2, 6, 18, 54, __, __, __, __
- (3) 1, 3, 6, 10, __, __, __, __
- (4) 2, 4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, __, __
- (5) 15, 26, 40, 16, 37, _____, _____, _____, _____
- (6) 11, 4, 16, 49, 169, _____, _____, _____, _____
- (7) 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, _____, _____, _____, _____

§ A 推論： $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^3$ 是否正確？

說明：

§ B--(1)

§ B--(2)

§ C--(1)

§ C--(2)

會騙人的平均數

剛從大學畢業的阿呆，找工作時，問老闆月薪多少？老闆回答說：『我們這裡平均月薪 43000 元』。阿呆高興之餘立刻答應了。一個月下來卻只領 10000 元，阿呆說：『老闆騙人！』老闆拿了員工薪水表給他看，果然月薪的平均值在 43000 元，這是怎麼回事？你能否替阿呆說明理由？那麼下次應徵時要提醒阿呆注意哪些事呢？

經理	主任	組長	員工	你的說明資料參考 南一 生活數學®
1 人	3 人	4 人	10 人	
100000 元	90000 元	80000 元	10000 元	

腦力激盪區

5		7					9	2
			4	3				7
9	4	8		5				1
			6				4	8
3		1	5		8	2		9
8	5				7			
1				9		6	2	3
4				6	1			
2	8					9		4

7	5	2			9			
			3	7			4	
		4			1	7		5
	6		5		4			
2		1				6		8
			2		6		1	
5		3	6			8		
	8			3	7			
			9			3	7	4

_____年 _____班 姓名：_____

_____年 _____班 姓名：_____

【數學月記】沒有品味的小偷

中山路發生了一起劫案, 受害的商家是『亞特糟糕藝術畫廊』, 店主人亞特總是出售很糟的畫作給藝術品味不佳的客人, 任何層次的藝術品都可以在亞特的店進進出出。那天是星期六, 一大早, 有個品味極差的小偷潛入店裡, 捲走店裡最糟糕的畫作。唯一的目擊證人是庫丹老先生。但他是個喜歡作怪的老人, 到了上午八點三十分, 警察已開始偵訊目擊證人庫丹先生了。開始下面的對話。警官耐著性子問：『你可以再說一次從犯案時間開始, 你是什麼時候看到小偷的呢?』

我想出個謎語給你們猜猜, 『為什麼長頸鹿的脖子會那麼長呢?』庫丹先生問道。

『庫丹先生!』

『好、好、好, 我說。小偷逃出畫廊的時候, 我看了手錶, 我可以很肯定的告訴你, 時間是在七點到八點之間, 而且距離七點的時間是距離八點的三倍長。』另外我也看到了他的車牌號碼。

『你怎麼不早說呢?』

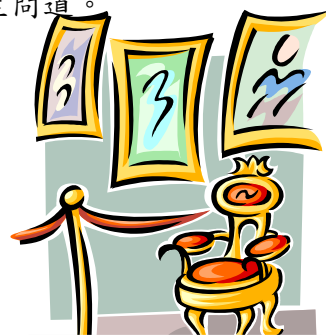
『我這不是說了嗎?』庫丹先生覺得很委屈。

對了, 車牌上有五位數字, 而且是個迴文, 不管從左向右念或是從右向左唸都一樣, 其實啊, 車牌兩邊分別是 6, 所有數字總和正好是小於 30 的最大質數。

這時, 那位女警官已經快把她手上的文件給揉爛了。『就這樣, 你要說的就這麼多?』

『你說的也對』, 庫丹先生想了想, 然後向她說道：『我這麼做的確對你們不太公平, 應該多說一些。車牌上的數字通通不是 1, 也通通不是質數, 這樣有沒有好一點? 我就知道這些了。』

這時只見這位女警官漲紅了臉, 想抓庫丹先生進警察局……



亞特糟糕藝術畫廊

參考資料來源：數學偵探。小天下出版。

聰明的你, 你覺得這位警官有機會破案嗎? 你知道下面問題的答案嗎?

庫丹先生是在幾點幾分看見竊賊離開畫廊的? 偷所駕的車子車牌號碼是幾號?
說說你如何得到以上答案的。