

歐幾里得筆下的橢圓切線隨想

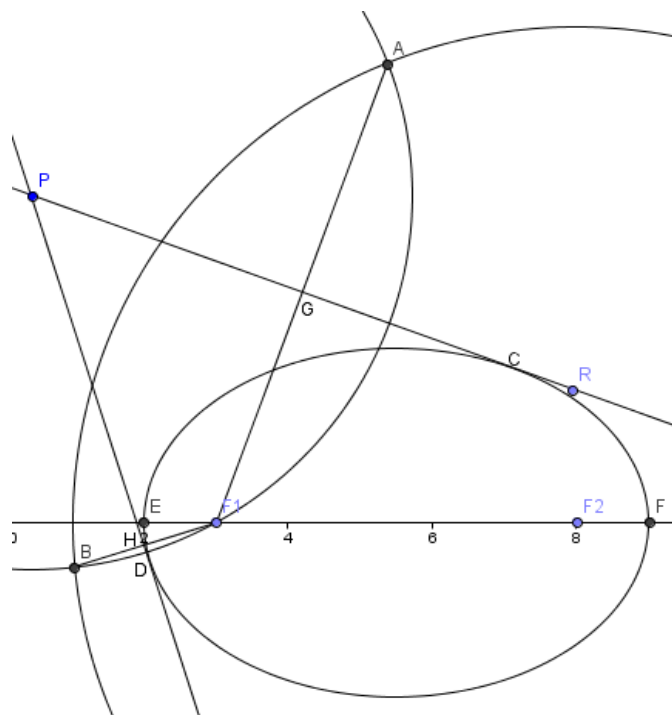
陳玉芬

這是在某次的研習中，教授所留下的題目：試著從《幾何原本》角度完成 P 點到橢圓 O 的切線，且 P 為橢圓 O 外一點。因為在《幾何原本》中，並未找到過 P 點作橢圓外的切線，因此，我們只能“模擬”在當下，歐幾里得是否也是如此運用一般的尺規作圖方式將它完成。今說明如下：

1. 假設已找到已知橢圓（如下圖）	
2. 以 F_2 為圓心， \overline{EF} (即長軸 $2a$) 為半徑畫圓 F_2	公設 3
3. 以 P 為圓心， $\overline{PF_1}$ 為半徑畫圓 P 並交圓 F_2 於 A, B 二點	公設 3
4. 連接 $\overline{AF_1}$ 、 $\overline{BF_1}$	公設 1
5. 作 $\overline{AF_1}$ 中點 G，使得 $\overline{GA} = \overline{GF_1}$ ；作 $\overline{BF_1}$ 中點 H，使得 $\overline{HB} = \overline{HF_1}$	I.10
6. 連接 \overline{PG} 、 \overline{PH} 並延長交於橢圓上的 C、D 二點	公設 1
7. \overline{PC} 、 \overline{PD} 即為橢圓上的二切線	

簡要證明：

1. 因為 $\overline{PF_1} = \overline{PA}$ (作圖步驟 3)，所以 $\triangle PF_1G \cong \triangle PAG$ (SSS 全等性質 I.8)
2. 得 $\angle PGA = \angle PGF_1 \implies \angle AGC = \angle F_1GC$
3. $\triangle AGC \cong \triangle F_1GC$ (SAS 全等性質 I.4)
4. 得 $\overline{CA} = \overline{CF_1}$
5. 假設 $\overline{AF_2}$ 交直線 PC 於 C 點，
因為 $\overline{CF_1} + \overline{CF_2} = \overline{CA} + \overline{CF_2} = \overline{AF_2} = 2a$ (長軸長)
所以根據橢圓定義，C 點在橢圓上。
6. 又，假設直線 PC 與橢圓不只相交一點 C，並設另一交點為 R, $R \neq C$
則 $2a = \overline{RF_1} + \overline{RF_2} = \overline{RA} + \overline{RF_2} > \overline{AF_2}$ ，矛盾。即直線 PC 與橢圓只有一個交點 C，
故直線 PC 為橢圓之切線



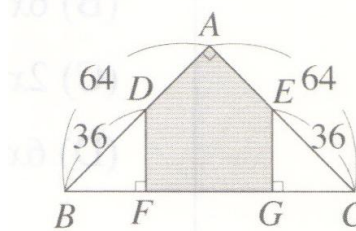
學生園地

最近在上三年級的複習課程，一位非常認真用心的汪×安同學（目前在308班，因為個人因素，生性低調，不希望編輯部公佈其名），問了一道數學題目，如下圖一，結果得到同學們的熱烈迴響，一題數解，其實學數學就該如此，大家一起腦力激盪，不管黑貓、白貓，會抓老鼠的就是好貓，當然如果能夠互相學習彼此的好解法，那就又精進一層了。今特將同學們的題目與解答呈現於下，也希望其他同學們也能互相學習，若有任何收獲歡迎投稿領賞哦！

題目：如圖一， $\triangle ABC$ 、 $\triangle BDF$ 、 $\triangle CEG$ 皆為直角三角形，且 $\overline{AB} = \overline{AC} = 64$ ， $\overline{DB} = \overline{EC} = 36$ ，求陰影部份的面積。

303 黃創偉同學如此解：

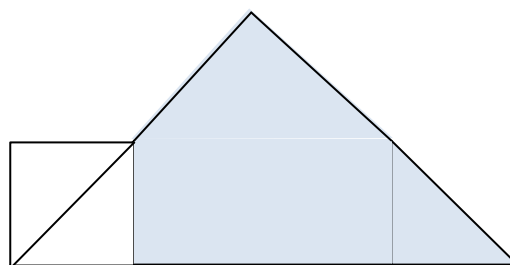
$$\begin{aligned} &\text{因為 } \triangle BDF = \triangle CEG \\ \text{陰影面積} &= \triangle ABC - 2 \times \triangle BDF \\ &= \frac{64 \times 64}{2} - 2 \times \frac{18\sqrt{2} \times 18\sqrt{2}}{2} \\ &= 64 \times 32 - 18\sqrt{2} \times 18\sqrt{2} \\ &= 1400 \end{aligned}$$



圖(一)

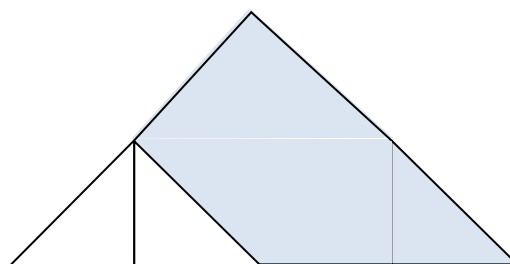
303 黃啟倫同學如此解：

$$\begin{aligned} &\text{因為 } \triangle BDF = \triangle CEG, \text{ 所以可視為一正方形} \\ &\text{則 } \overline{DB} = 36 \text{ 可視為正方形對角線} \\ \text{陰影面積} &= \triangle ABC - \text{正方形面積} \\ &= \frac{64 \times 64}{2} - \frac{36 \times 36}{2} \\ &= \frac{1}{2}(64^2 - 36^2) \\ &= 100 \times 14 = 1400 \end{aligned}$$



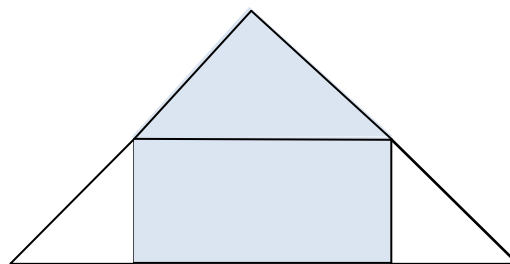
304 曾嘉彬同學如此解：

$$\begin{aligned} &\text{因為 } \triangle BDF = \triangle CEG, \text{ 所以可視為一等腰直角} \\ &\text{三角形} \\ \text{陰影面積} &= \text{梯形面積} \\ &= (64 + 36) \times (64 - 36) \div 2 \\ &= \frac{1}{2}(64^2 - 36^2) \\ &= 100 \times 14 = 1400 \end{aligned}$$



302 廖文慈同學如此解：

$$\begin{aligned} \text{陰影面積} &= \text{等腰直角三角形} + \text{長方形面積} \\ &= \frac{(64 - 36) \times (64 - 36)}{2} + (64\sqrt{2} - 18\sqrt{2} \times 2) \times 18\sqrt{2} \\ &= 392 + 1008 \\ &= 1400 \end{aligned}$$



同學們，是不是也挑起了你的鬥志，也想找一題來試試看！

數學週考風雲榜

單元 1-1											
班級	座號	姓名	成績	班級	座號	姓名	成績	班級	座號	姓名	成績
101	3	林學謙	95		16	邱昕庭	95	209	17	曹育溱	95
	11	黃勝原	93		21	陳瑛平	99	210	7	陳昭晨	95
	17	李佳靜	95		22	藍璘依	98	306	12	吳少君	100
	28	陳嘉淳	100		24	李家丞	94		17	施禹安	96
105	19	郭敏嘉	94		26	邱宗翔	94	305	12	王琦雅	100
104	8	陳奕瑋	95		31	辛芷妍	95	310	1	王一紘	97
	14	李沛彤	95	201	3	呂祈宏	95		5	林晟文	96
	23	王玟博	95		16	呂沂庭	95		8	黃冠程	100
	25	王皓平	100		28	陳玉穎	100		9	黃煒哲	100
	33	廖奕婷	100	202	12	林育瑄	100	311	2	吳俊鴻	96
107	13	鄧紹廷	90		24	林文傑	95		5	林煒傑	96
	14	黎品佑	100	204	15	黃瑋亭	95		9	黃乃脩	97
	25	穰鈺婷	100	206	2	林岱泓	100		17	周芸竹	96
	30	張馨云	90		6	許智豪	100		23	陳冠瑋	96
109	7	陳嘉興	95		16	范于庭	95				
	18	陳巧翊	100		17	張宜羚	94				
	23	李柏翰	99		21	劉曉芸	100				
110	1	王永孟	90	207	4	曹雲凱	100				
	4	孫智閔	100	207	10	王鈺媿	100				
	10	黃士軒	90		20	顏于雯	90				
	12	廖仁浚	90		21	林佳弘	100				
	13	劉振嘉	100		25	黃俊霖	100				
	15	李宜潔	100	209	15	徐艾琳	95				

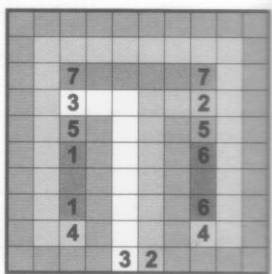
前期答對同學名單

注意：名字旁的數字表示你答對的題數，也是你可以來領取下午茶的分數哦！

305 陳柏翰x4	303 林豆豆x4	302 廖文慈x3	305 陳家暉x4	302 楊碩文x3	302 張耀誠x3	
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	--

※ 編輯部聲明：每期都有適合各年級同學的程度，希望同學們針對自己的實力誠實地全力以赴，如此獲獎才有意義！

483 數連 20



前期答案

『明德數人』手札 限量發行中

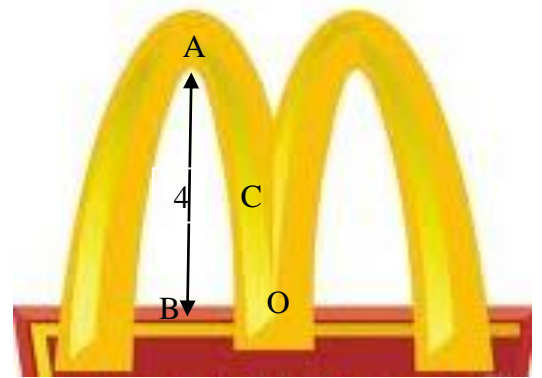
專屬明德學生的數學成長記錄正在限量發行中，歡迎同學們向你們的數學老師索取，凡是認真書寫的，只要經過數學老師們一致推薦，即可領取精美禮物一份（目前此份禮物老師們正在研擬要如何精美中，切勿錯過哦！）

歡迎同學們將你對數學的學習心得不論是喜、怒、哀、樂都一一記下，甚至在課堂中的靈光乍現也立刻記下，那麼你一定會將數學學得很出色，因為大數學家高斯就是這麼做的。

麥當勞與數學

這是同學們熟悉的麥當勞標記，但同學們知道其中蘊涵著什麼樣的數學嗎？若仔細想一下，就不難發現它是二個對稱的拋物線了。現在題目來了：

- (1) 如果右圖中的A點為左邊拋物線的頂點，且距離底邊為4單位（即 $\overline{AB} = 4$ ）， \overline{AB} 為左邊拋物線的對稱軸，底邊B點到O點的距離為1單位，今若已知拋物線上的C點距離底邊為2單位，請問C點到 \overline{AB} 的距離為多少？



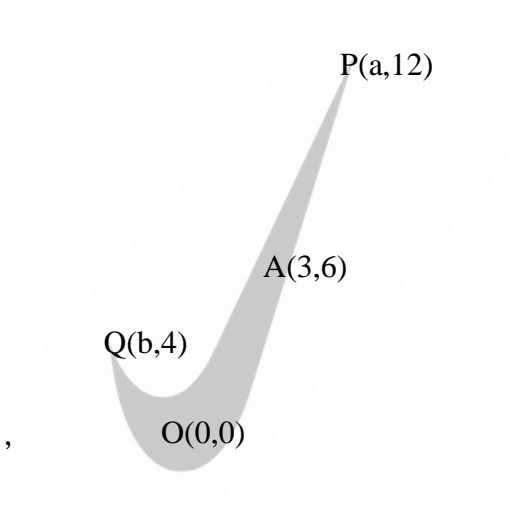
- (2) 若O點為直角坐標上的原點，請問此二次函數該如何表示？

NIKE與數學

右圖也是同學熟悉的標記，巧合的是它也與拋物線有關，大家也來關心一下吧！

如右圖，頂點坐標為原點，並通過A(3,6)，請問：

- (1) 此標記的二次函數為何？
(2) 若P、Q為此標記的二個端點，那麼想要畫出這樣的標記，x應有何限制？



腦力激盪區

2	1				8			3
			1			9		
	3	4	5		9	8		
9		7				3	6	
	2	6				5		1
		3	4		1	2	7	
		1			2			
5			3				8	4

8				6				3
5	3						8	6
		6				9		
6		5				7		8
			8		7			
9		8				3		5
		3				8		
4	8						6	7
2				7				4

_____年 _____班 姓名：_____

_____年 _____班 姓名：_____



本刊將從本學期開始，另增【數學月記】，每月一主題，這個月就從我們的早餐開始吧！

學校早餐 月記

不管是在家裡吃還是到早餐店買，早餐可說是我們每天早上發動自己體內「引擎」的重要方法。這個月就從早餐開始吧！

*** 早餐輕鬆配：**讓小朋友從以下的菜單裡自由選擇，每一種選出一項，搭配出一份完整的早餐：(1) 鬆餅或麥片粥，(2) 水果或果汁，(3) 吐司或饅頭，(4) 牛奶或熱可可。有人可能想吃麥片搭配水果、吐司和熱可可，也可能有人喜歡鬆餅配果汁、饅頭和牛奶。讓大家想想看，這一份菜單總共可以變化出多少種不同的早餐？

參考資料來源：天天玩數學。小天下出版。

156 數連 7

請在下列空格中著上不同的顏色，讓相同數字的格子可以連接成一條路線。圖中每個空格都會有路線通過，但每一格只能通過一次，路線不能交叉或分叉。答案請見284頁。

2	3								
								4	
	1								
				6	7				
				7					
		5	6						
								5	
2	4	3	1						

