

店址：新北市立明德高中國中部數學科教學研究會
店長：李伶芳 老師
執行長：陳玉芬 老師
大掌櫃：黃乃脩
師傅群：王琦雅 鄭昀倪
跑堂：林家誠 李應昇

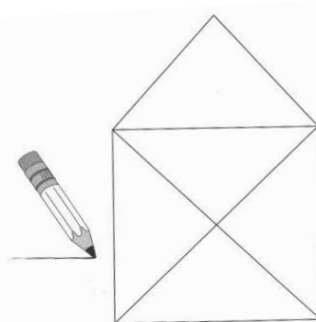
數食店月刊

第54期 101年6月號

你可以自己創造一筆畫的圖形【尤拉圖形 (Euler graph)】

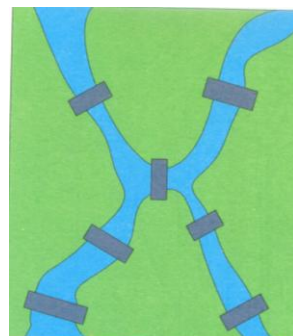
杜鼎祥 老師

問喜不喜歡玩益智遊戲？不論大人或小孩，大都會回答『喜歡』。原因無它，只因這些遊戲只需要透過觀察，(胡亂)嘗試，最後大都可找出解答，而這種找出解法的成就感是讓人感到愉悅的，所以大部分的人都喜歡玩益智遊戲(可惜的是很少人會去歸納找出解答方法)，可是說到數學呢，問喜不喜歡數學？很多人會直接回答『我不喜歡數學』(傷數學老師的心Y)。那益智遊戲與數學這二者之間有無關聯呢？都其實是有大大的關係，數學的學習方法也是需要使用**觀察**(上課聽講)，**嘗試**(反覆做練習)，**分析方法**(懂了、了解了)，**結論**(會了、會應用)，大部分的人不會排斥玩益智遊戲卻不喜歡數學，這就是不曾細心體察二者之間的方法其實是雷同的，所以感覺不出來的。



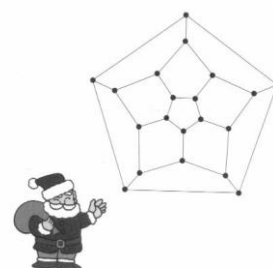
記得一筆畫的遊戲規則嗎？將圖形一筆畫完成，而且每一條線段只描繪一次，不得重複。試試看右上圖的圖形，你可以一筆畫完成嗎？(每一個點都可當起始點嗎，還是只有特定点呢？)

在1736年歐洲的柯尼斯堡(konigsberg)的地圖上有一地區有二條交會的河流，河流上有七座橋(右圖中)，住在那區的人發現無論怎麼走，在每一座橋都不能重複走的條件下，都無法將每一座橋都走過一遍，而最後能回到原來的出發地點，因此，有人跑去請教大數學家尤拉(L.Euler, 1707~1783)，尤拉提出了大家戲稱一筆劃路徑的論文，為了紀念尤拉，數學家們將可以一筆畫描繪，且起點與終點相同的圖形，稱為尤拉圖型(Euler graph)。



另一例子：聖誕老公公發送聖誕禮物，聖誕老公公從家裡出發，禮物都要送到每一戶，最後回到家(右下圖)，這是另一種一筆畫的問題，是**從圖形上任一點出發，經過圖上所有的點，最後回到原始出發點**(即除了起點與終點外，其他的點都恰好經歷一次，**路徑不一定要走過**)，這是1855年漢米爾頓(Sir William R. Hamilton)勳爵士提出的「一筆畫遊歷問題」，也稱為**漢米爾頓迴路(Hamilton cycle)**，因為最後回到了原始起點。最後，尤拉在1736年提出結論是

1. 每一個圖形的奇數點個數必定是偶數
2. 一個圖形若可用一筆描述，它必為一個連通的圖形。
3. 至多有二個奇數點的圖形，必可一筆描繪。
4. 若某一圖形恰有兩個奇數點，那可用其一奇數點當起始點，另一奇數點當終點，即可一筆畫完成。
5. 若圖形上所有點都是偶數點，那可由任意點當做起始點，原起始點當終點。



哪些圖形可以一筆描繪？或是有哪些點當起點才可以完成一筆畫的問題，你想知道嗎？若對相關問題有興趣，想更深入探討，請到圖資管借閱 徐力行教授所寫的『沒有數字的數學』，看看你找出的結論與偉大著名的數學家們的結論是否相同。

摘錄自 徐力行教授所寫的『沒有數字的數學』

數學週考風雲榜

單元 3-3 4-1

班級	座號	姓名	成績	班級	座號	姓名	成績	班級	座號	姓名	成績
101	3	呂祈宏	90	105	5	陳禹愷	90	107	21	羅灼	95 100
	7	張立穎	90		10	廖文銓	90		22	林佳弘	100 100
	14	呂沂庭	95 100		11	鄭郁諺	90		23	曹雲凱	100 90
	19	陳郁璇			24	朱冠穎	95 100		28	黃俊霖	95
	23	李岱蔚	90		28	杜佳玲	100	109	2	朱俞臣	90
	25	林柏維		106	2	林岱泓	90 100		16	徐艾琳	90
	26	蔡丞翰	100		5	莊智嘉	90		18	曹育溱	90
	31	陳玉穎	95 90		6	許智豪	95 90	111	11	黃冠斌	90
102	4	張郁晨			16	范于庭	100		13	林維真	90 90
	11	林郁瑄			21	劉曉芸	100 100		17	張明暄	90
	22	王俊文	95		23	蔡佳軒	95		22	高聖庭	95
	24	林文傑	90		27	羅祥豪	90		23	陳成銘	90
103	24	冷玥	100	107	9	王鈺媿	95 90		25	童紹豪	90
104	24	黃楠清	100		19	蔡芷欣	90		29	胡家菱	90
105	4	張文勝	90								



前期答案 注意：名字旁的數字表示你答對的題數，也是你可以來領取下午茶的分數哦！

205 陳柏翰x3	203 林豆豆x11	210 馮柔淳x3	203 王星詠x3	204 曾喜彬x9	210 蕭芳儀x3	106 范于庭x6
-----------	------------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

※ 編輯部聲明：每期都有適合各年級同學的程度，希望同學們針對自己的實力誠實地全力以赴，如此獲獎才有意義！

特別表揚：203 林豆豆 同學以及 204 曾喜彬 同學完成本次月刊中的數學挑戰題目，而且非常用心地作圖與解答，足堪同學們學習！各獲由數學科林志寬老師捐贈的圓規一組

編輯部廣播

1. 請中二的學長姐加油哦，雖然這二次的週考卷難了一點點，但是連著二次週考，我們都只能看著學弟妹們榜上有名，是不是該再把勁？
2. 由於上期月刊中的一些題目，同學們熱心解答，所以編輯部在本期中特地將前期答案做個詳盡說明，無非是由衷期待每位同學對於每期月刊上的內容能充滿熱情地閱讀，以及同學們能對月刊中各式的數學題目也都樂於挑戰，這樣才不辜負老師們用心編輯的苦心呀！



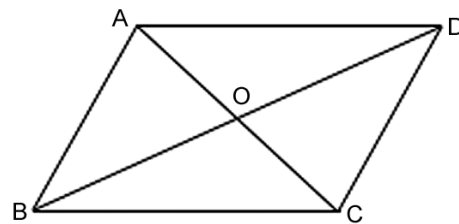
請問半徑為 r ，高為 a 的披薩體積為何呢？

答案就在本期的某個角落哦！

一、是不是平行四邊形？

如右圖，若 $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ 且 $\angle B = \angle D$ ，請問同學這樣的四邊形是平行四邊形嗎？若是，請證明。又若 $\overline{BC} = \overline{AD}$ 且 $\angle B = \angle D$ ，這樣的四邊形是平行四邊形嗎？若不是，請舉個反例。

也許透過下列的活動，可以讓同學們對於平行四邊形判別的觀念更加清晰吧！



已知四邊形 ABCD，考慮條件：

① $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ② $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ③ $\overline{AB} = \overline{CD}$ ④ $\overline{BC} = \overline{AD}$ ⑤ $\angle A = \angle C$ ⑥ $\angle B = \angle D$

任取上述條件中的二個，能否得出平行四邊形 ABCD？若能，請寫出代號的組合，並說明原因

實際上，利用窮舉法將全部條件任取二種的搭配共 15 種 ($\frac{6 \times 5}{2}$) 即：

(① ②)、(① ③)、(① ④)、(① ⑤)、(① ⑥)、(② ③)、(② ④)、(② ⑤)、(② ⑥)、(③ ④)

(③ ⑤)、(③ ⑥)、(④ ⑤)、(④ ⑥)、(⑤ ⑥)

而在上述搭配中，卻只有 9 組是可以得出平行四邊形的，分別如下：

(1) (① ②) 二組對邊分別平行

(2) (③ ④) 二組對邊分別相等

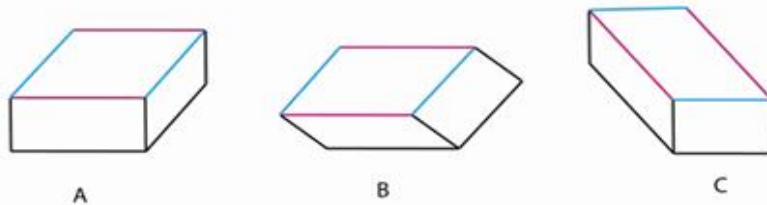
(3) (⑤ ⑥) 二組對角分別相等

(4) (① ③)、(② ④) 一組對邊平行且相等

(5) (① ⑤)、(① ⑥)、(② ⑤)、(② ⑥) 一組對邊平行，一組對角相等。

歡迎同學們在腦力激盪區寫下它們合理的證明。也期待同學們將其餘 6 種有可能組成的其他非平行四邊形畫出。

二、是一樣的平行四邊形嗎？

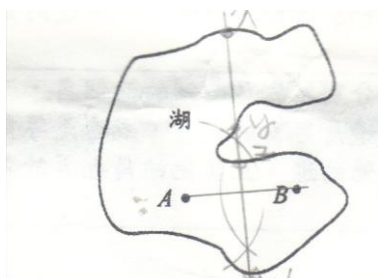


也許你會說，很明顯這幾個平行四邊形不一樣。但是不管你怎麼想，這三個平行四邊形其實是完全一樣的。因為每組對邊的長度都一樣，只是我們的大腦認為盒子 A 和盒子 C 中的對角線透視縮短，這樣會產生這兩個盒子看起來比實際要長的效果。盒子 B 和盒子 C 也是一模一樣的，只不過盒子 B 是逆時針旋轉過的。

這一作品是由位于華盛頓的美國大學(American University)的莉迪亞-馬尼亞蒂斯創作的。

數學挑戰區解答

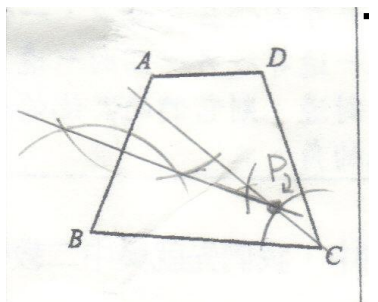
1. 如圖， A 、 B 兩處為湖中的兩個小島。若 P 為湖岸不規則曲線上的一點，且 $\overline{PA} = \overline{PB}$ ，則可能的 P 點共有 **4** 個



答：W、X、Y、Z 即為所求

204 曾喜彬 同學 作圖

2. 如圖，已知四邊形 $ABCD$ ，欲找一點 P ，使 P 點到 $\angle C$ 兩邊的距離相等，且 P 點到 \overline{AB} 兩端點的距離也相等，利用尺規畫出 P 點的位置。



204 曾喜彬 同學 作圖

3. 因為時針行走的速率固定是分針的 $\frac{1}{12}$ ，且每一分格為 6° 所以下列題目解題如下，假設：

分針每行走 x 分，即行走了 $6x^\circ$ ，而時針則行走 $\frac{x}{12} \times 6^\circ$

- (1) 中午 12 時 20 分時，分針與時針的夾角是多少度？

$$\text{夾角度數} = 20 \times 6^\circ - \frac{20}{12} \times 6^\circ = 110^\circ$$

- (2) 在 7 時幾分時，時鐘的兩針會成：

(a) $\left| \frac{x}{2} + 35 \times 6 - 6x \right| = 90$

$$\therefore \left(\frac{x}{2} + 35 \times 6 - 6x \right) = \pm 90, \text{ 解得 } x = \frac{600}{11} \text{ 或 } \frac{240}{11}$$

即在 7 時 $\frac{600}{11}$ 或 $\frac{240}{11}$ 分的時候，時鐘的兩針會成直角

(b) $\left(\frac{x}{2} + 210 \right) = 6x$ ，解得 $x = \frac{420}{11}$

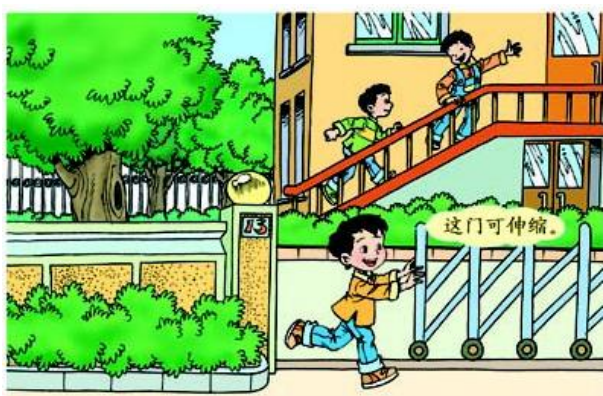
即在 7 時 $\frac{420}{11}$ 分的時候，時鐘的兩針會成重合

(c) $\left(\frac{x}{2} + 210 \right) - 6x = 180$ ，解得 $x = \frac{60}{11}$

即在 7 時 $\frac{60}{11}$ 分的時候，時鐘的兩針會成一直線

4. (1) 一壘坐標 (5,5)、二壘坐標(0,10)、三壘坐標(-5,5)
 (2) 打擊者從本壘跑到一壘，其路徑的直線方程式為 $y=x$
 (3) 外野手從 (-4, 14) 的位置傳球給在二壘壘包的二壘手，假設球的路徑為一條直線，則此直線方程式為 $y=-x+10$
 (4) 有一顆棒球打擊出去之後，以相等的速率直線前進，從 $P(-5, 10)$ 前進到 $Q(-6, 12)$ 只需 1 秒鐘。若前進的方向及速率皆沒有改變，則由 Q 點經過 4 秒鐘到達 R 點，求 R 點的坐標(-10,20)

平行四邊形欣賞區



資料參考來源

https://www.google.com.tw/search?q=%E5%B9%B3%E8%A1%8C%E5%9B%9B%E9%82%8A%E5%BD%A2%E7%85%A7%E7%89%87&hl=zh-TW&prmd=imvns&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=m_nTT7OeMoTPmAWMkcihAw&ved=0CGcQsAQ&biw=1920&bih=956

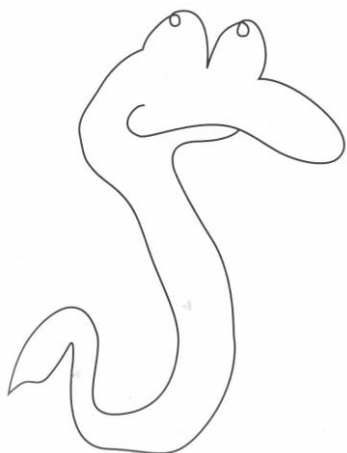
參考 P.3 平行四邊形的圖形，回答下列選項哪些可以判定四邊形 ABCD 為平行四邊形？

- (A) $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$
- (B) $\angle ABC = \angle ADC$, $\angle BAD = \angle BCD$
- (C) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
- (D) $\overline{AO} = \overline{CO}$, $\overline{BO} = \overline{DO}$
- (E) $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$,
 $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$
- (F) $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
- (G) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AB} = \overline{CD}$
- (H) $\angle A = \angle C$ 且 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
- (I) $\angle A = \angle C$ 且 $\angle B = \angle D$
- (J) $\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$,
 $\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$
- (K) $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\angle ABC = \angle ADC$

答：

能否在欣賞完本期 P.4 的平行四邊形的圖畫之後，也能創造一幅圖畫中至少包含六種平行四邊形的圖形呢？請畫於此處。

參考下列的圖形，你能否也在右邊框框中，創造出一個卡通人物也能一筆畫完成的圖形？



針對本期 p.3 的平行四邊形的條件組合，若認為可以組成平行四邊形，請寫出證明，若不能組成平行四邊形，請舉反例。

輕鬆一下

P.2 的參考答案
pizza (因為 $\pi * z * z * a$)

抄作業其實並不叫做抄作業..... 	中文上叫 借鑑 
英文上叫 copy 	幾何上叫 全等 
代數上叫 等量交換 	地理上叫 遷移 

$E=MC^2$ 物理上叫 質能等價 	化學上叫 同位素 
政治上叫 相同本質 	生物上叫 同源 
歷史上叫 文化大統一 	電腦上叫 物件導向 
健康上叫 減輕腦部負擔 	實際上叫 懶得寫作業 

<http://sites.google.com/site/mathpomelo717/mathjokes>

	4		5	3		2		
				9				3
9		2			6	5		
		4	6		5			8
7	9						2	5
6			7		9	3		
		9	3			1		4
4				5				
		3		7	4		5	

2				1		6	3		4
		3				2			
7		4				5	6	1	
5	4	7							6
9							5	4	8
	9	5	2				4		7
			7				8		
3		8	5		4				1

_____年 _____班 姓名：_____ _____年 _____班 姓名：_____

如圖，P、Q、R、S 為各邊的中點， $\triangle ABC$ 的面積為 20， $\triangle DBC$ 的面積為 16，則 PQRS 的面積為多少？

