

店址：新北市立明德高中國中部數學科教學研究會
店長：李伶芳 老師
執行長：陳玉芬 老師
大掌櫃：黃乃脩
師傅群：王琦雅 鄭昫倪
跑堂：林家誠 李應昇

數食店月刊

第 53 期 101 年 5 月號

《沒有王者之路~幾何原本》之心得報告

薛尹雯老師

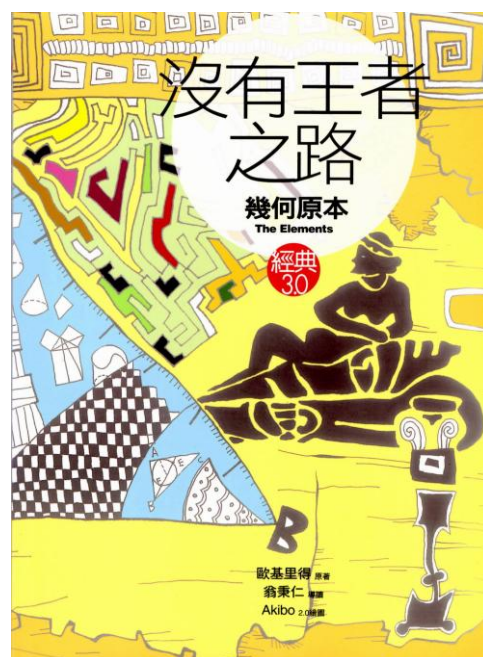
在幾何方面，較為國中生所知的偉人，不外乎就是歐幾里得、畢達哥拉斯（畢氏定理），而歐幾里得被譽為「幾何之父」，並著有『幾何原本』一書；從希臘三哲中的柏拉圖，在雅典開創的雅典學園大門，上面寫著「不識幾何學不能入此學園」中就可以看出，幾何在生活中是不可或缺的。

『幾何原本』是幾何界中的聖經，原以為會非常的難讀，但在看完這本書之後，才發現，原來『幾何原本』所寫的內容，竟然在我們高中所學的課程中就學過了，這的確讓我非常的驚訝！後來發現，其實幾何也是很可愛及有趣的，在這本書中還證明了一些幾何基本的證明，例如：三角形內角和為 180° 、畢氏定理，利用幾何的方式來證明，顯得可愛多了。此外還說明了數學邏輯的概念，而推理方法是歐幾里得編撰『幾何原本』這本書的重要基礎，邏輯推理之所以重要，主要是因為它明晰又嚴格，可以讓論證產生強大的說服力與確定性，例如：假設「所有動物都會死亡」，那麼因為「人會死亡」，所以「人是動物」，看似正確的論述，但其實是錯的，為什麼呢？因為「蘭花也會死」，若根據這樣的推論，可以得到「蘭花也是動物」，但很明顯地，這樣的結論是錯的！因為假設本身就已經出問題了，因此所得到的結論當然不夠嚴謹。

在『幾何原本』一書中，歐幾里得先定義一些會用到的幾何概念，例如：直角、銳角、正三角形、等腰三角形、直角三角形、各種四邊形、圓形等等，然後再引進最關鍵的要素—公設，也就是不證自明的前提，書中有五個公設：一、「兩點決定一條直線」，二、「延伸線段可以得到直線」，三、「圓心和半徑決定一圓」，四、「所以直角皆相等」，五、「平行公設」；以上這五個公設都是國中生已經知道且耳熟能詳的，基本證明都是以這五個公設出發去證明的。

希臘有三大幾何難題：一、「將一個給定角三等分」，二、「給定一圓，做一個和它面積相等的正方形」，三、「給定一正方體，做一個體積兩倍大的正方體」，這是非常有名的，直到十九世紀，數學家才有足夠的工具，證明這三個問題都不可解。

這本書拉近了我們和數學之間的距離，讓數學課程不再遙不可及，同時也是可以讓國中生自己閱讀就可以輕鬆了解幾何的有趣之處，也讓看似可怕的證明變得可愛多了，



希望有興趣的學生可以看看這本書，相信一定會從此愛上幾何及數學的！

《幾何原本》第 I 冊 V.S 中二幾何課程

陳玉芬 老師

讀了本期薛老師所撰之《沒有王者之路~幾何原本》心得，又再度燃起個人對《幾何原本》的敬意，所以特別整理了《幾何原本》中與現今中二階段相關的作圖或證明的內容做為一些呼應。

《幾何原本》第 I 卷 內容摘錄

命題(Proposition)	命題敘述
命題 4 (SAS 全等性質)	如果兩個三角形有兩邊分別等於兩邊，而且這些相等的線段所夾的角相等。那麼，它們的底邊等於底邊，三角形全等於三角形，而且其餘的角等於其餘的角，即那等邊所對的角。
命題 5 (等腰三角形二底角相等)	在等腰三角形中，兩底角彼此相等並且若向下延長兩腰。則在底以下的兩角也彼此相等。
命題 8 (SSS 全等性質)	如果兩個三角形的一個有兩邊分別等於另一個的兩邊，並且個的底等於另一個的底。則夾在等邊中間的角也相等。
命題 9 角平分線作圖	二等分一個已知直線角。
命題 10 類似中垂線作圖 線段中點作圖	二等分已知有限直線
命題 11 過線上一點作垂線	由已知直線上一已知點作一直線和已知直線成直角。
命題 12 過線外一點作垂線	由已知無限直線外一已知點作該直線的垂線。
命題 16 外角大於任何一個內對角	在任意的三角形中，若延長一邊，則外角大於任何一個內對角。
命題 18 大邊對大角	在任何三角形中，大邊對大角。
命題 19 大角對大邊	在任何三角形中，大角對大邊。
命題 20 任意兩邊之和大於第三邊	在任何三角形中，任意兩邊之和大於第三邊。
命題 23 等角作圖	在已知直線和它上面一點，作一個直線角等於已知直線角。
命題 24 樞紐性質	如果兩個三角形中，一個的兩條邊分別與另一個的兩條邊相等，且一個的夾角大於另一個的夾角，則夾角大的所對的邊也較大。
命題 25 逆樞紐性質	如果在兩個三角形中，一個的兩條邊分別等於另一個的兩條邊則第三邊較大的所對的角也較大。
命題 26 ASA 及 AAS 全等性質	如果在兩個三角形中，一個的兩個角分別等於另一個的兩個角，而且一邊等於另一個的一邊。即或者這邊是等角的夾邊，或者是等角的對邊。則它們的其他的邊也等於其他的邊，且其他的角也等於其他的角。

限於篇幅，在上面的表列中，我們先就與中二教學有關內容以及《幾何原本》的重要特色與大家分享討論。

1. 《幾何原本》之所以可以稱為數學界的聖經，在於《幾何原本》提供了「純數學」的模式、嚴密的公理、準確的定義、仔細陳述的定理和邏輯一致的證明（Katz, 1998/2004，頁 48），數學因而從具體的、經驗的、進展到抽象的、論理的、架構的系統。因此，如果我們以歐幾里得的邏輯演繹為準則並依照上述的命題順序教學，將發現現今的「尺規作圖」是安排在「三角形的 SAS 及 SSS 全等性質之後」的，而這樣的安排顯然是讓「尺規作圖」的作法有了合理性，也許這可做為我們第一現場教師的一個學習之處。
2. 正如亞里斯多德（Aristotle, 384-322 B.C.）所言，科學著作必須從定義公理開始。而歐幾里得承襲了這些思想，所以《幾何原本》在第一卷，就給了 23 個定義(definition)、5 個設準（或稱公設 postulate）以及 5 個公理(common notion)，¹因為亞里斯多德強調：「每一個概念的存在都必須要能被證明」。舉例來說：一個四邊等長的矩形叫做正方形，因此，要證明正方形存在，我們必須要證明這個矩形存在，要確定此一矩形存在，必須要證明此矩形是一個四個皆為直角的平行四邊，接著，我們必須要證明這平行四邊形存在，如此不斷地回溯到最基本的概念，而當此基本概念無法被證明時，就必須要接受它的真實存在，而這「真實存在」的基本概念即所謂的「定義」（Bunt, et al., 1998）。例如《幾何原本》中定義：點是沒有部份；線是沒有寬度的長等。同時，對於某些命題是自然存在的，歐幾里得則將其視為設準，諸如：從任意一點到任意一點可作一直線；以任意中心和任意的距離可以畫圓等。而在設準之後，歐幾里得總結出對所有學科都成立的真理，他把它們稱為「公理」。諸如：於同量的量彼此相等；整體大於部份等。也就是說，公設(postulate)在某個程度上我們可視為是一種數學上的「特定性概念」，而公理(common notion)，則較視為「共通性的概念」。²



「Q.E.F」與「Q.E.D」的差別

1. 「Q.E.F」通常使用於當在數學中的「尺規作圖」完成時，即我們常說的「即為所求」。
2. 「Q.E.D」通常使用於當在數學中的「定理證明」完成時，即我們常說的「得證」
 - 以上二者都是拉丁片語的縮寫。前者是"quod erat faciendum"，後者是 quod erat demonstrandum

¹這與《沒有王者之路~幾何原本》一書中介紹的專有名詞有些出入，因此想做些補充，《沒有王者之路~幾何原本》中介紹有 23 個定義、5 個公設以及 5 個設準(參見 p.30-31)，在此也提供國外原文網站，供讀者更加了解。網址：
<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>

² 參考資料 洪萬生(2011) <http://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=22693>

編輯部廣播

掛於師四室牆上的『數食店月刊信箱』近日不翼而飛，拾獲者請交給本校任一位數學老師。

如有任何關於數食店月刊信箱的問題，請向編輯部查詢。



對稱圖形票選結果出爐

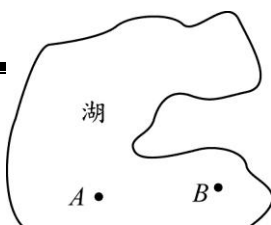
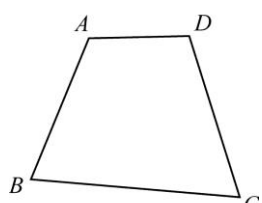
特優	203 林采潔 『佛祖保佑』
優等	207 李奕鉉 『蝴蝶』
	211 林煒傑 『紋面象』
佳作	210 施先豪 『蝴蝶』 208 莊浩翰 『福(蝠)祿(綠)雙至』
	205 陳柏翰 『愛護地球』 202 張澄澄 『春蝶』
	203 林采潔 『夢幻幸運草』 211 周瑋庭 『動物王國』

評分過程與標準說明如下：

- 此活動原是希望由同學共同參與票選，但發現少數同學卻使用不榮譽的方式來增加票數（諸如：撕下其他同學的貼紙，然後貼於自己心目中的理想位置），因此評分結果由數學老師們重新票選。
- 所有的得獎作品，除了美觀、用心之外，重要是要包含多種的對稱設計。
- 得獎作品獎勵如下：
 特優：禮卷 200 元 優等：禮卷 100 元 佳作：乖乖一包

數學挑戰區

可以麻煩同學們再花些時間，思考一下以下的題目好嗎？上個月不知是因為信箱不見了，還是沒有任何一位同學完成挑戰，總之編輯部很受挫折，難道我們學生一題都解不出來嗎？難道每次只能做「數獨」嗎？難道感受不到編輯部老師哭泣中嗎？

<p>1. 如圖，A、B 兩處為湖中的兩個小島。若 P 為湖岸不規則曲線上的一點，且 $\overline{PA} = \overline{PB}$，則可能的 P 點共有多少個？</p> 	<p>2. 如圖，已知四邊形 $ABCD$，欲找一點 P，使 P 點到</p> 	<p>3. (1) 中午 12 時 20 分時，分針與時針的夾角是多少度？ (2) 在 7 時幾分時，時鐘的兩針會成： (a) 直角</p>
--	---	--

答：	$\angle C$ 兩邊的距離相等，且 P 點到 \overline{AB} 兩端點的距離也相等，利用尺規畫出 P 點的位置。 (直接作圖於圖上)	(b) 重合 (c) 一直線 (直接作答於空白處)
----	---	---

數學週考風雲榜

單元 3-1 3-2

班級	座號	姓名	成績	班級	座號	姓名	成績	班級	座號	姓名	成績
101	3	呂祈宏	100 95	104	3	陳定朋	100	107	17	劉文玉	90
	7	張立穎	90 90		8	嚴佑元	95		18	蔡孟潔	90
	14	呂沂庭	100		15	黃瑋婷	100		20	顏于雯	95 95
	19	陳郁璇	90		16	詹惠燕	90		21	羅均	100 100
	23	李岱蔚	90		14	陳蕙涵	95		22	林佳弘	100 95
	25	林柏維	100 90		19	魏嘉伶	100		23	曹雲凱	100 100
	26	蔡丞翰	90		24	黃楠清	100		24	許右宏	90
	31	陳玉穎	90	106	2	林岱泓	95 95		26	陳宏暉	100
102	4	張郁晨	95		5	莊智嘉	95 95		27	游又璫	90
	11	林郁瑄	100		6	許智豪	100 90		28	黃俊霖	95
	24	林文傑	95		12	藍健新	95 90	30	王子嘉	90	
	28	陳暉茵	90		14	吳沆慈	90		32	蔡佩芸	90 95
103	7	黃業燊	100 90		16	范于庭	100 95	111	3	陳友峻	100 90
	12	譚曜程	95		21	劉曉芸	90 95		4	陳志洋	90
	13	蘇佑宇	100		27	羅祥豪	95		7	楊欽孟	95
	17	楊芷雲	90	107	2	林亮均	100 100		13	林維真	100 95
	20	蘇鈺芷	95		9	王鈺媿	90 100		22	高聖庭	95 100
	24	冷玥	90 95		10	王鈺嫻	90		25	童紹豪	90 100
104	1	沈少庸	100		11	呂宜珊	90		29	胡家菱	90
	2	許喜洋	90		15	鄒伶鈺	95				

單元 2-3 3-1

201	3	凌敬	100	203	11	王星詠	100		2	呂承恩	94
	4	郭政瑋	90		14	林豆豆	92		3	宋世傑	100
	7	黃誠剛	96		15	林采潔	97		11	吳少君	100

	15	黃慧珠	97		17	陳樂如	100	206	15	施禹安	97
	27	李玟	91		21	吳璟嘉	93		21	楊耀富	97
202	1	王廷君	91		23	莊政泰	91		23	鄭博鴻	97
	5	李奇	95		26	詹鈞友	94	207	24	謝紹洋	100
	7	林昀皓	97		27	洪語杉	91		6	陳永寧	91 94
	11	楊凱翔	92		29	陳怡蓁	100		14	王雲螢	97
	13	黎治成	94	205	11	王琦雅	95		16	呂芯瑜	90 98
	15	張澄澄	98		17	鄒佩祺	96		17	張梅玲	91
	17	曾曼茹	92		4	陳世峰	91		18	陳佳慧	92 91
	20	鄭詠欣	96		5	陳柏翰	97		22	李奕鉉	100
	21	蘇意惠	94		11	王琦雅	90	208	25	王千慈	97
	25	林怡君	91		18	廖恩欣	94		11	鍾承皓	90
203	2	李明峻	90		19	鄭昀倪	94		17	陳怡妏	97
	5	洪鼎聖	92		23	陳家曄	97		23	陳仁川	100
	6	陳子新	95		25	廖家駿	91	209	9	王佳宣	94
	8	黃啓倫	90	206	26	張雅雯	94		13	高意雯	97
	9	黃創偉	94		1	吳瑞翔	91		23	賴世堯	95
209	25	林彥伶	94	210	24	劉瓊毅	91	211	16	王綾憶	94
210	3	余泓陞	97		27	馮柔淳	91		19	周瑋庭	94
	6	施先豪	91	211	5	林煒傑	92		24	陳冠瑋	94
	8	黃冠程	91		7	陳孝文	100 92		26	陳筱芸	97
	21	蕭芳儀	96		9	黃乃脩	91		27	劉緩玲	94
	22	陳仁宗	97		12	廖友吉	92				



3				7				6
4			2	1	3			
		8		6		3		
2			9					5
5		6	7		2	8		9
9					6			4
		3		8		9		
			6	9	5			3
7				2				8

	4	1		2	5		7	
5	2		8					
					6	2		
8			4			5		9
			5		2			
2		4			9			1
		2	1					
					8		5	6
	8		7	6		3	9	

_____年 _____班 姓名：_____

_____年 _____班 姓名：_____

318 誰是誰 5

請根據以下提供的資訊，將下圖的老師和學生正確配對。

我是格雷老師，我的學生是約翰，他手裡拿著彈弓。

我是威廉老師，我的學生是魏斯，他身上沒有沾到墨水。

我是布羅德老師，我的學生是勞埃德。

我是肯特老師。

作答於此