

一位學生給我的教學啟示 —— 二次函數的教學

涂佩瑜 陳玉芬 老師

二次函數的應用問題中：將繩長切成兩段，面積和最小發生在兩繩等長時；在數線上一線段中找一點，使點到線段端點距離平方最小，答案是線段中點；利用固定繩長圍成矩形，欲使矩形面積最大，答案亦是長寬相等時，甚至當固定繩長只圍矩形的三面，欲使矩形面積最大時，答案仍是長與二邊寬的和相等時。因此，有很多同學看到找極值的問題時就不管三七二十一，直接將題目給的條件除以 2 帶進去求答案。此種投機取巧的方式，在某些條件下確實能夠節省下時間，但不宜鼓勵，同學應瞭解其中原理，才能避免錯誤，本篇我們不妨就來徹底談談相關的例題與背後的數學原理。

【例1】 兩正整數和為 10，欲使兩數之乘積為最大，兩數為何？乘積最大為多少？

依題意：設兩正整數分別為 x ， $10-x$ ，且其乘積為 y ，則： $y = x(10-x) = -x^2 + 10x$

解法一：(利用配方法)

原函數

$$y = x(10-x) = -x^2 + 10x = -(x-5)^2 + 25 \leq 25$$

所以，當我們取 $x = 5$ ，即當兩數皆 5 時，會有最大值 25。

解法二：(利用取巧法)

原函數

$$y = x(10-x) = -x^2 + 10x = -(x^2 - 10x)$$

因為 x^2 係數為負數，取

$$x = \frac{10}{2} = 5 \text{ 為最大值}$$

解法三：(利用對稱軸法)

$$y = x(10-x) = -(x-0)(x-10) \text{--- ①}$$

在①式中，令

$$y = 0, \text{ 則此二次函數與 } x \text{ 軸的交點為 } (0,0), (10,0)$$

找出對稱軸為 $x = \frac{0+10}{2} = 5$ ，因此當我們取 $x = 5$ ，

即當兩數皆 5 時，會有最大值 25。

【例2】 旅行社舉辦活動，預定人數 40 人，每人收費 6000 元，但超過 40 人後若每增加 1 人，每人收費可減少 100 元。

依題意：假設增加 x 人，可列式為 $y = (6000 - 100x)(40 + x)$

解法一：(利用配方法)

$$y = -100(x-60)(x+40) = -100(x^2 - 20x - 2400) = -100(x-10)^2 + 240000 + 10000 = -100(x-10)^2 + 250000$$

所以，當 $x = 10$ 人時，將有極大值 250000 元

解法二：(利用取巧法)

$$y = -100(x-60)(x+40) = -100(x^2 - 20x - 2400)$$

因為 x^2 係數為負數，所以取

$$x = \frac{20}{2} = 10 \text{ 為最大值}$$

解法三：(利用對稱軸法，此處亦可稱為 304 班 王仕銘同學法)

$$y = -100(x-60)(x+40) = -100(x-60)[x-(-40)]$$

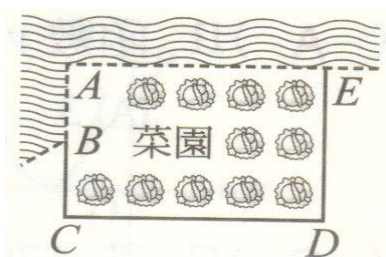
$$\text{令 } x = \frac{60+(-40)}{2} = 10,$$


代入得最大價值 250000 元。


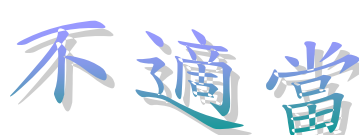
【例3】 如右圖，長 120 公尺的鐵絲網，在河邊圍一個矩形的菜園。虛線部份為河邊，不圍鐵絲網，若 $\overline{AB} = 20$ 公尺，則菜園 (矩形 ABCD) 的面積最大為多少平方公尺？

依題意：設 $\overline{BC} = x$ ，則 $\overline{DE} = 20 + x$

可列式 最大面積 $y = (100 - 2x)(20 + x)$



<p>解法一：(利用配方法)</p> $y = (100 - 2x)(20 + x)$ $= -2x^2 + 60x + 2000$ $= -2(x^2 - 30x) + 2000$ $= -2(x - 15)^2 + 2450$ <p>所以，當 $x = 15$ 時，將有極大值 2450 元</p>	<p>解法二：(利用取巧法)</p> 	<p>解法三：(利用對稱軸法)</p> $y = (100 - 2x)(20 + x)$ $= -2(x - 50)(20 + x)$ <p>令 $y = 0$，得</p> $(x - 50)(20 + x) = 0$ <p>所以對稱軸取</p> $x = \frac{50 + (-20)}{2} = 15 \text{ 時有極大值}$
--	--	--

<p>【例4】 已知矩形 ABCD 中，$\overline{AB} = 4$，$\overline{AD} = 6$，今在 $\overline{AB}, \overline{AD}$ 上分別取 P, Q 兩點，使 $\overline{AP} = \overline{AQ}$，則四邊形 PQDC 的最大面積為多少？</p> <p>依題意：設 $\overline{AP} = \overline{AQ} = x$，則 $\overline{BP} = 4 - x$</p>		
<p>解法一：(利用配方法)</p> <p>四邊形 PQDC 的最大面積 y</p> $= 24 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \times 6 \times (4 - x)$ $= -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 12$ $= -\frac{1}{2}(x - 3)^2 + \frac{33}{2}$	<p>解法二：(利用取巧法)</p> 	<p>解法三：(利用對稱軸法)</p> 

結論：

1. 從上面 4 個例題說明中，我們可以發現，所謂的「取巧法」，其實與對稱軸法殊途同歸，其目的都在找與 x 軸相交二點的中點（即對稱軸），只是當 x^2 項的係數不為 1 時，無法直接將一次項係數除 2 得之。¹
2. 對於例題 4 而言，對稱軸法的利用，不應說是失效，只是不適當，因為就題意的例式而言，其結構已不適合再因式分解了。²
3. 由此觀之，同學們一定明白了為何老師們總是強調利用配方法來解題，因為唯有使用數學本身的性質，才是解題的正道，簡單地說：如果明白了數學的原理而用第二種方法來解，那就是「捷徑」，若只是覺察「好像也對」，那就是取巧囉！
4. 既然配方法是「正道」，那是不是每一題都用它來解都恰當？由上觀之，若當題目已呈因式分解狀態（如例 1）或展開將有較複雜或龐大的數（如例 2），那麼用對稱軸法來解就較恰當。

最後，還是非常高興 304 班王仕銘同學所察覺到的解題方式，可看出同學不拘泥於課本的解題方式，對於數學題目有敏銳的觀察，並能深入思考、細心解題，這種態度十分值得嘉許。期盼有更多同學也能用心體會數學之美。

¹ 若真想使用此法，建議同學回憶一下在二次函數中尋找對稱軸的方法，即 $x = \frac{-b}{2a}$ ，那麼你就攻無不克，戰無不勝囉！

² 當然若同學有興趣，歡迎發揮追根究底的精神將它利用根的公式解找到與 x 軸相交的二點，雖然交點為無理數的座標，但其對稱軸仍完全正確。

誰來挑戰學長？

請你（妳）將下列的座標依序描在直角坐標的四個象限內（在每個象限內，再畫各自的座標軸），並將各限象的點依序連起來然後以逆時針方向寫出你的答案在右邊空白處，可參加摸彩哦！

第一象限：(-3,7),(0,7),(3,7),(0,7),(0,-7),(-3,-7),(3,-7)

第二象限：(0,3),(-1,4),(-2,5),(-3,5),(-4,3),(-4,2),(-4,1),(-4,0),(-4,-1),(-3,-2),(-2,-3),(-1,-4),(0,-5),
(1,-4),(2,-3),(3,-2),(4,-1),(4,0),(4,1),(4,2),(4,3),(3,5),(2,5),(1,4),(0,3)

第三象限：(-6,-5),(-3,5),(0,-5),(3,5),(6,-5)

第四象限：(0,4),(1,4),(3,2),(3,1),(3,0),(3,-1),(2,-2),(1,-3),(0,-3),(0,0),(0,4)

答案是：

題目設計者：畢業學長陳俊廷

同學們，你（妳）是否也有更好的創意要發揮呢？不要客氣，寫出你所設計的座標及答案，若經錄取刊登，即有禮卷100元哦！

我設計的答案是：_____

第一象限：

第二象限：

第三象限：

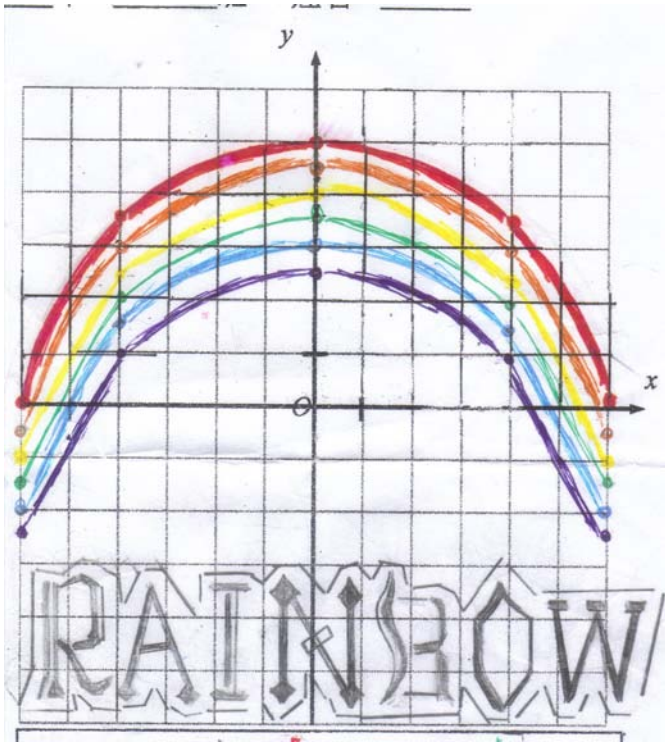
第四象限：

中一(下)數學復習週考風雲榜

單元 1-2				單元 1-3				單元 2-1			
班級	座號	姓名	成績	班級	座號	姓名	成績	班級	座號	姓名	成績
101	1	吳昊哲	100	101	1	吳昊哲	90	101	1	吳昊哲	100
	3	凌欽	100		12	吳季帆	100		3	凌欽	100
	12	吳季帆	95	102	6	林昀皓	100	102	12	黎治成	94
	16	陳沛均	90		17	廖文慈	100		26	林怡君	94
102	6	林昀皓	90		22	陳庭佑	100	103	8	黃啓倫	100
	17	廖文慈	90		15	陳韋伶	96		11	王星詠	100
	22	陳庭佑	94		10	楊凱翔	100		13	李怡萱	100
103	11	王星詠	100		12	黎治成	94		14	林豆豆	100
	14	林豆豆	100		14	張瑩瑩	100		15	林采潔	100
	18	黃士芸	90		19	蘇意惠	90		18	黃士芸	94
	8	黃啓倫	100		20	王奕翔	100		23	莊政泰	94
	9	黃創偉	94		26	林怡君	100		29	陳怡蓁	92
105	14	洪昱嫻	100	103	10	蕭宇辰	92		30	陳郁霖	100
	25	陳家曄	100		11	王星詠	100		31	陳樂如	100
107	16	邱孟璇	100		14	林豆豆	100		12	吳珞菲	100
111	5	林煒傑	100		6	陳子新	92		25	陳邵維	90
	7	陳孝文	100	104	8	曾喜彬	100		28	陳沛樞	90
	12	蘇鈺証	100		29	廖文秀	100	107	6	陳永寧	100
	16	周瑋庭	100		4	陳民翰	100		16	邱孟璇	100
					21	吳旻諺	100		13	王雲螢	100
<p>編者按：很高興，參與活動的同學及成績表現都進步很多，希望同學們能繼續努力讓大家看到自己的實力。</p> <p>另外，別忘了，凡在這榜上出現的名字就可來參加摸彩獲得精美禮物哦（名字出現幾次，就可抽幾次，過癮吧！）</p>				105	25	陳家曄	100		22	李奕鉉	92
				107	17	陳佳慧	92		28	廖奕涵	100
					16	邱孟璇	100		24	陳仁宗	92
				111	7	陳孝文	92	111	2	吳俊鴻	94
					8	黃乃脩	94		4	林家誠	100
					12	蘇鈺証	94		5	林煒傑	100
									7	陳孝文	94
									8	黃乃脩	94
									10	廖友吉	94
									12	蘇鈺証	100
					15	周芸竹	100				



同學的作品欣賞



左圖為本校 309 班鄭臣竣同學對拋物線平移圖形在生活中所聯想到六色彩虹，真的很棒（可惜同學們看到的圖案是單色的，不然會更美），除此之外，鄭同學更將此七道彩虹由上至下的二次函數寫於下方，讓我們一起欣賞他這美麗又充滿知識性的作品吧！

$$(1) y = \frac{-5}{36}x^2 + 5$$

$$(2) y = \frac{-5}{36}x^2 + 4\frac{1}{2}$$

$$(3) y = \frac{-5}{36}x^2 + 4$$

$$(4) y = \frac{-5}{36}x^2 + 3\frac{1}{2}$$

$$(5) y = \frac{-5}{36}x^2 + 3$$

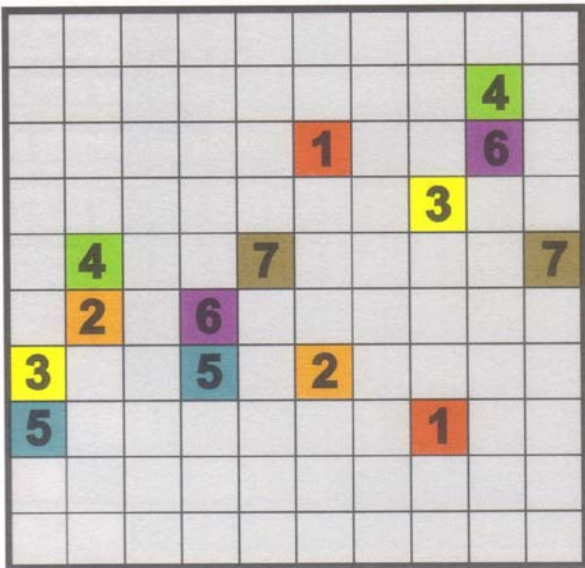
$$(6) y = \frac{-5}{36}x^2 + 2\frac{1}{2}$$

鄭同學記得可以來領禮券 100 元哦！

動動腦時間

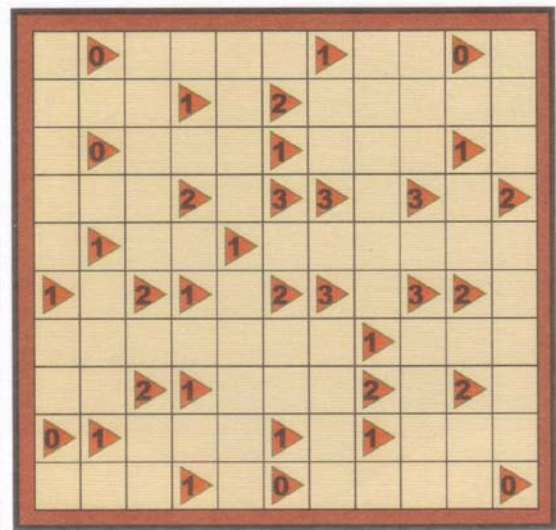
106 數連 5

請在下列空格中著上不同的顏色，讓相同數字的格子可以連接成一條路線。圖中每個空格都會有路線通過，但每一格只能通過一次，路線不能交叉或分叉。答案請見 284 頁。



107 踩地雷 2

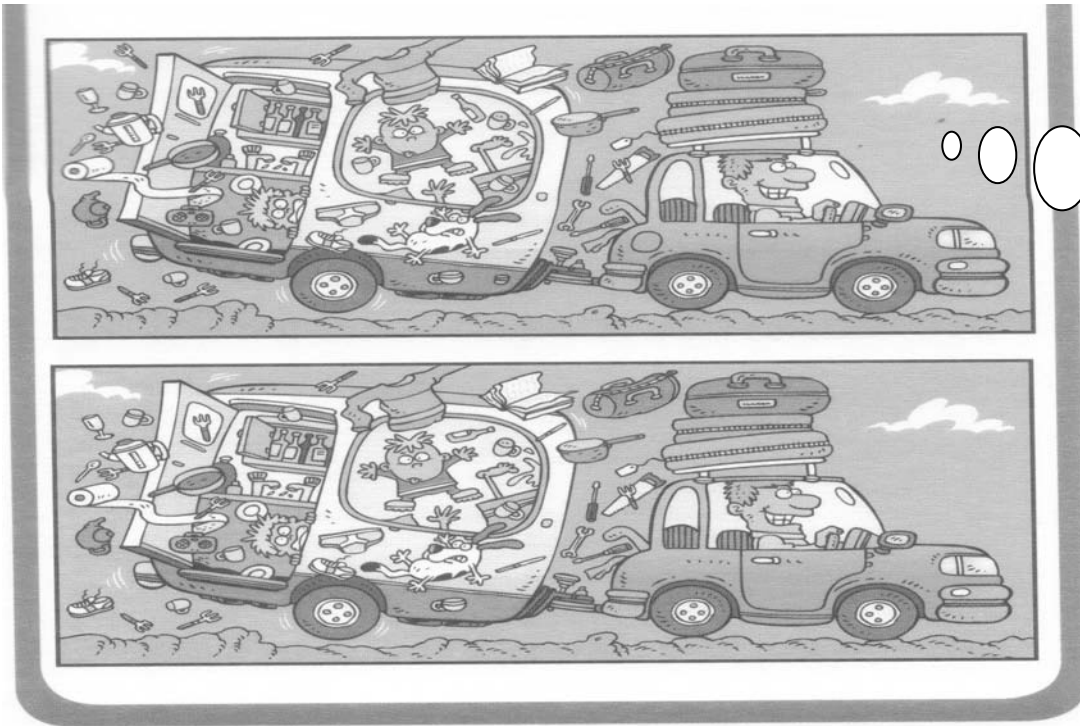
下圖的空格中埋有一些地雷，紅旗的數字表示在它周圍的 8 個方格裡所埋的地雷數，請找出地雷埋設的位置。答案請見 275 頁。



以上參考資料來源：蒂姆 戴多普羅斯 (2010)。哈佛給學生做的 1001 個思維遊戲。禾風車出版。

大家來找碴

參考資料來源：蒂姆 戴多普羅斯 (2010)。哈佛給學生做的 1001 個思維遊戲。禾風車出版。



請同學在左邊的二個圖中找出不一樣的地方 (至少 5 個而且小於 10 個)

6		1		7	4		9	3
					2	8		4
								2
	4	2		8			5	
		8	7	2	6	4		
	6			9		1	2	
5								
8		6	3					
2	9		6	1		3		5

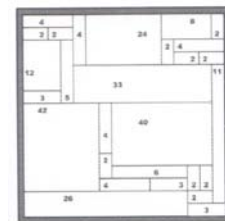
		4	5		1	6		
1				8				3
	5			4			2	
		1	2		8	4		
4	3			7			1	2
		5	1		4	8		
	1			6			9	
6				5				1
		3	8		9	7		

_____年 _____班 姓名：_____ _____年 _____班 姓名：_____

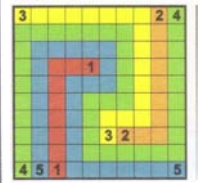
注意：名字旁的數字表示你答對的題數，也是你可以來領取下午茶的份數哦！

209 陳詩涵x6	306 李雅晴x3	206 鄭君楷x9	306 陳筱雯x6	111 陳冠璋x9
111 黃乃脩x6	110 高雅慧x6	110 吳亭萱x5	110 馮柔淳x7	110 蕭芳儀x3
205 連嘉伶x3	207 陳彥任x7	105 陳世峰x8	309 鄭臣竣x9	201 楊心誠x9
111 王韻婷x2	206 陳佳伶x6	108 周家祥x1	108 林玉萱x8	104 曾嘉彬x12
103 王星詠x5	110 汪映彤x2	202 謝政哲x2	201 蘇詩文x8	103 林采潔x2
306 鄧瑋x4	202 馮佳音x8	202 丁定宏x6	306 陳思麒x2	210 蕭佩瑋x10
105 陳柏翰x9	105 楊智勝x6	105 洪昱嫻x9	111 林煒傑x10	105 陳家擘x12
103 李明峻x6	111 林家誠x4	306 張心瑜x5	105 鍾政宇x8	111 廖友吉x5

114 空間分割 5



76 數連 4



上期參考解答

201 李芷嫻x8