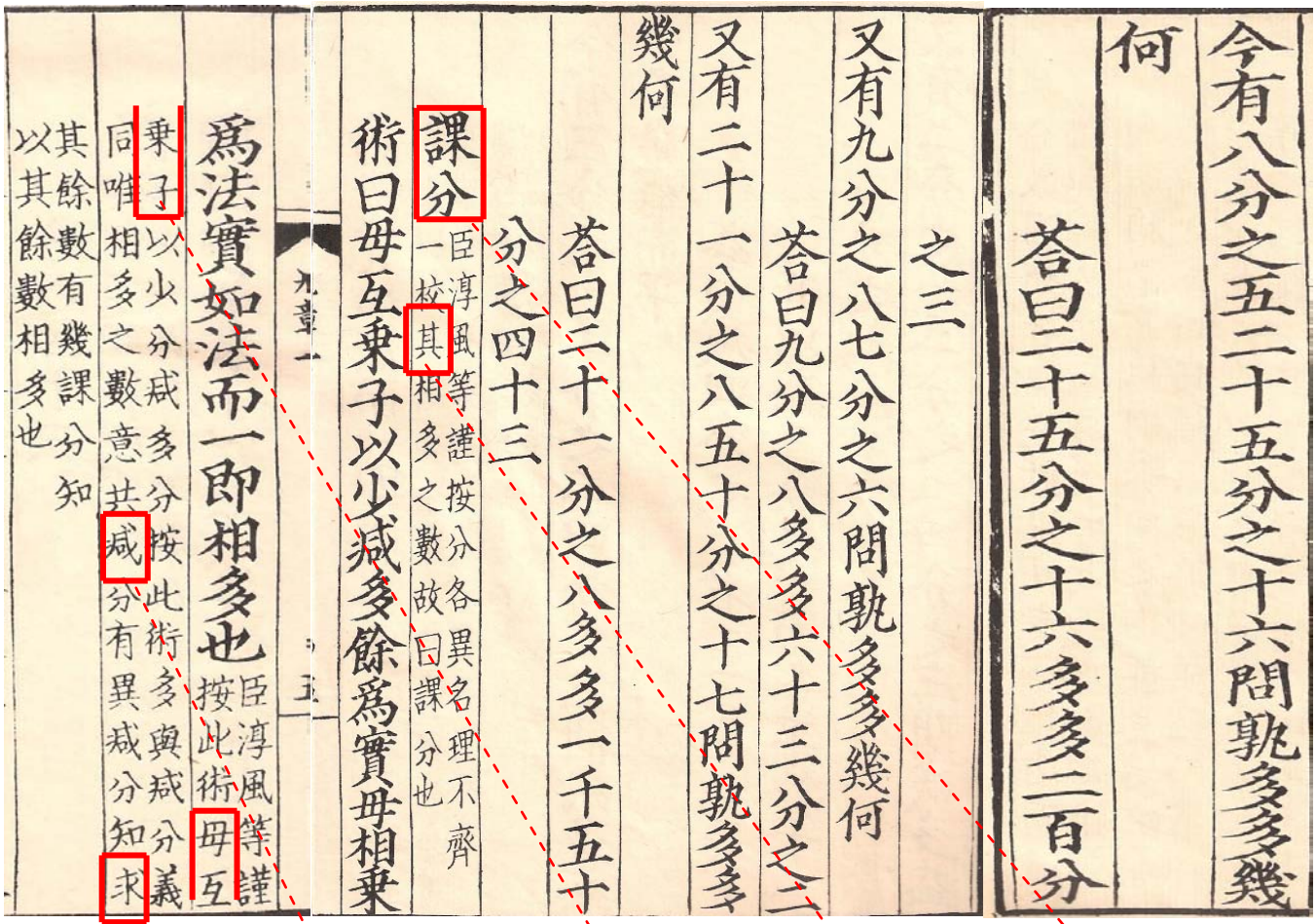
店址　：明德國中數學科教學研究會
店長　：朱志竣　老師
執行長：陳玉芬　老師
大掌櫃：陳孝文
師傅群：劉緩玲　潘紫瑄　陳薏臻

數食店月刊

第四十三期　100年　3月號

古文本的「課分術」　VS.　現代版的「比較分數」

陳玉芬　老師


今有八分之五二十五分之十六問孰多多幾何
荅曰二十五分之十六多多二百分之三
又有九分之八七分之六問孰多多幾何
荅曰九分之八多多六十三分之二
又有二十一分之八五十分之十七問孰多多幾何
荅曰二十一分之八多多一千五十分之四十三
課分臣淳風等謹按分各異名理不齊一校其相多之數故曰課分也
術曰母互乘子以少減多餘爲實母相乘爲法實如法而一即相多也臣淳風等謹按此術母互乘子以少減多餘爲實母相乘爲法實如法而一即相多也同唯相多之數意共減分有異減分知求其餘數有幾課分知以其餘數相多也

「知」意通「者」

「共」意通「與」

「母互乘子」，指分母互相乘其分

「校」引申爲「較」

「課分術」即爲比較分數大小的法則。

上文中，陳述了三道問題，而術文則是藉由劉徽的注文說明「課分術」的方法，說明「課分」（分數的大小比較）與分數的減法法則並無不同，僅在於意義之不同。而其「課分術」的方法，主要也是利用母相乘爲「法」[1]（各分母相乘作爲新分母），母互乘子以少減多餘爲「實」[2]（分母互相乘其分子之後，令大數減去小數[3]，得其餘數作爲分子）。而此餘數即爲較大數所多之數。

[1] 法：指法器，測量單位，在此引申爲分母，參見李繼閔(1992)。《九章算術》及其劉徽注研究。P.67-68
[2] 實：實物總稱，在此指被除數，即分子，參見李繼閔(1992)。《九章算術》及其劉徽注研究。P.67-68
[3] 因當時尚無負數概念，故強調需大數減小數。

藉由上述的三道問題，可以發現**即使是古代的數學文本，其傳達的數學核心知識仍未改變，分數的運算與操作過程是先從直觀的洞察開始，然後建立分數意義的pattern，以便做概念的內化，[4]然後才強調運算的熟練度**。說明如下：此三問分別是比較$\frac{5}{8}$與$\frac{16}{25}$、$\frac{8}{9}$與$\frac{6}{7}$、$\frac{8}{21}$與$\frac{17}{50}$的大小，那麼我們將發現，第 1 問中，只需將$\frac{5}{8}$擴分至$\frac{15}{24}$，而其題型則與第 2 問的$\frac{8}{9}$與$\frac{6}{7}$之題型相同（皆爲分子、分母各加1 的分數），那麼無需計算，也能確定何者大小了。[5]同理，將第 3 問的$\frac{8}{21}$擴分至$\frac{16}{42}$，學生是可以直觀判斷$\frac{16}{42}$大於$\frac{17}{50}$。[6]

基於此，我們可以說明當時的中算家確實認爲分數的學習可以從基本的分數概念開始，訓練直觀的洞察、pattern的建立，以及強調運算的熟練度。

1. 在《九章算術》中，分數部份的題目安排依序是約分、合分、減分，然後才課分。**課分的運算法則**運用了減分的運算法則，而減分的運算法則運用了合分中使用的「齊同術」，[7]**基本上體現了數學的邏輯性**，而藉由三道提問中不需計算而能瞭解分數大小的判斷，正可說明**「概念性知識」**亦存在其中。當然，每題皆問：「孰多？多幾何？」，學習者必須不斷利用分數的交叉相乘作運算，這不正是**中算家所強調的「程序性知識」**？！

2. 現今國中教科書的安排，分數大小的比較是在約分（或擴分）之後即開始，因此未做任何四則運算，然後才分數的加法、分數的減法。**相較於《九章算術》，顯然如此安排少了些許邏輯上的嚴謹性。[8]但倒也呼應了學童在學習分數的初期階段，是存在有直觀的洞察能力**。且教科書中的佈題（只有二題），[9]著重在通分之後同分母下的分子比較，所以只強調通分的技能熟練與通分的目的與應用，失去了對分數大小的概念與pattern建立的練習機會。同時，若要訓練其熟練度，那麼亦應不斷強化分母、分母交叉相乘的「程序性知識」。

3. 從古代文本中，我們可以學習到如果一昧地使用規則而不瞭解其意義，那麼學習數學將會是危險且無聊的，因此**教師應盡可能使其規則有意義化，同時也應在學生的學習中，不斷培養、強化數學的數感以及抽象化**。

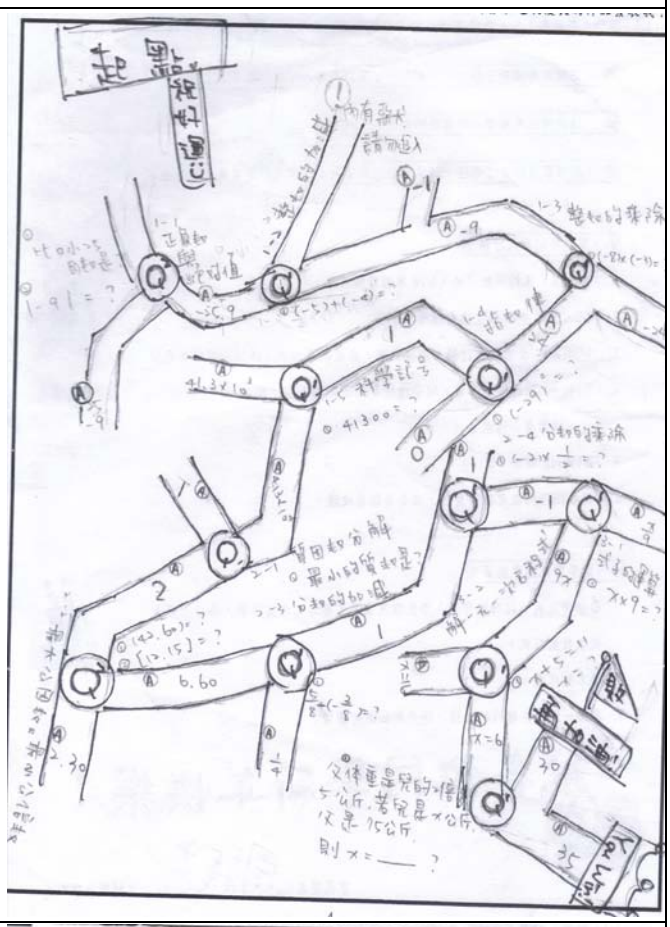
上文是個人在寒假期間針對分數的比較大小所作的一個古今文本對照的小評論，也許不夠成熟，但做完之後，倒也覺得不論是古代的中算家或現代的數學家，其實對數學的感受是一致的，也許我們可以忽略他們用詞遣字的艱澀難懂，專注於他們對分數解題的技巧與概念吧！

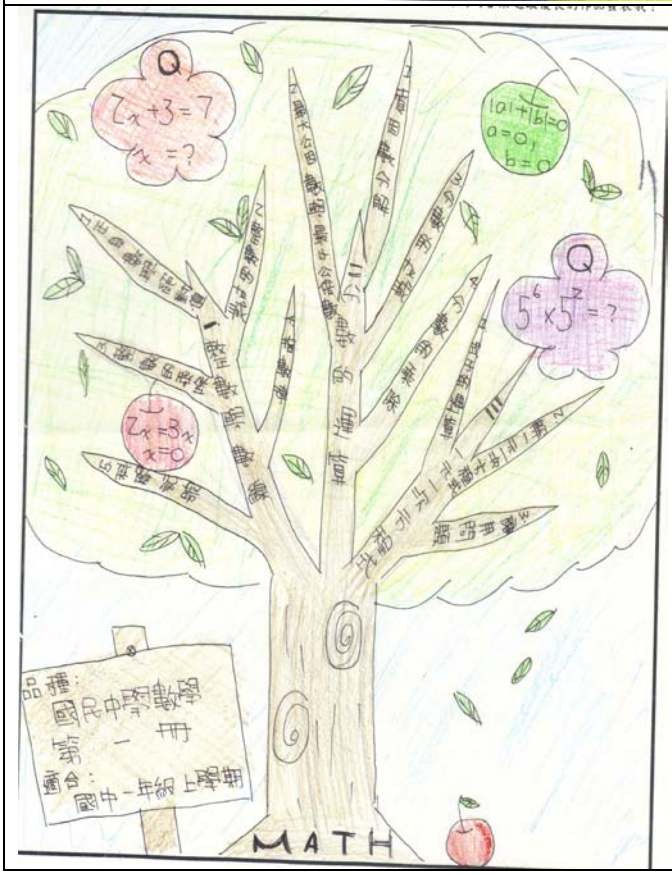
---

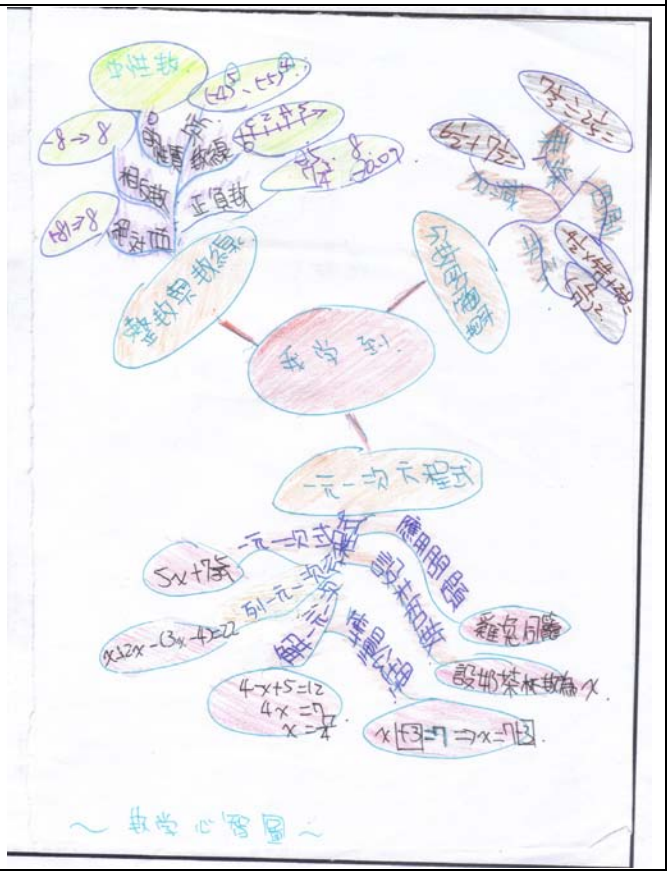
[4] 在「課分」中，學習者將試著觀察分子、分母遞增後分數值的變化，建立分數關係的 Pattern。
[5] 在真分數中，分子、分母各加 1 後的分數值比原分數值大。
[6] 因爲分子值近似，但分母差距確相對較大。
[7] 「齊」：分母互乘子爲分子，「同」：分母相乘爲公分母，簡言之，「齊同數」即爲現今的通分。
[8]若要比較大小，基本上應仍須回歸至減法的運算才能得知。
[9] 比較(1) $-\frac{2}{3},-\frac{3}{5}$之大小， (2) 比較$-1\frac{1}{6},-1\frac{1}{7}$之大小。（雖然是負數題目，但比較方法仍先判斷正數時的大小關係）。

以下四幅「**中一第一冊數學科學習地圖**」是經由本編輯部票選出的最優寒假作品，而描繪這樣的地圖不僅讓同學可重新溫習上學期的學習內容，更能增加同學的組織能力與重點整理，也許在欣賞同學們的才華之後，你（妳）也可試試看，也許畫得更棒，那麼歡迎投稿！

左下圖：102 蘇意惠　右下圖：111 周瑋庭　左下下圖：102 廖文慈　右下下圖：111 劉緩玲







中一(下)數學復習週考風雲榜

單元 1-1											
班級	座號	姓名	成績	班級	座號	姓名	成績	班級	座號	姓名	成績
101	1	吳昊哲	92	103	10	蕭宇辰	94	104	5	陳俊嘉	100
	3	凌欹	92		11	王星詠	100		8	曾嘉彬	100
	6	黃誠剛	91		12	吳珞菲	100		30	歐冠妤	94
	9	蔡明宏	90		14	林豆豆	92	105	4	陳世峰	92
102	12	黎治成	92		18	黃士芸	98			王琦雅	100
	15	陳韋伶	92		20	吳璟嘉	92			張雅雯	90
103	3	李俊融	96		27	洪語杉	100	107	6	陳永寧	92
	6	陳子新	95		28	陳沛樞	94		13	王雲螢	100
	8	黃啓倫	92		29	陳怡蓁	94		16	邱孟璇	100
	9	黃創偉	92	104	4	陳民翰	92		17	陳佳慧	92
111	1	王易升	92	111	8	黃乃脩	96	110	24	陳仁宗	92
	5	林煒傑	100		12	蘇鈺証	100	111	16	周瑋庭	95
	7	陳孝文	100		15	周芸竹	100		24	陳筱芸	95

恭喜下列爲上期數獨或大家來找碴答對的同學，也感謝你們的熱情參與。

注意：名字旁的數字表示你答對的題數，也是你可以來領取下午茶的份數哦！

308 吳紫琳x2	210 蕭佩瑋x1	206 鄭君楷x3	308 程雅旻x2	111 陳冠瑋x4	105 陳柏翰x4	105 陳家曄x4
305 洪啓峻x2	305 莊庭瑄x2	110 吳亭萱x1	110 馮柔淳x1	110 蕭芳儀x1	110 高雅慧x1	305 鍾依潔x4
205 連嘉伶x2	11 蘇鈺証x3	202 陳明玉x1	309 鄭臣竣x4	202 蘇怡靜x1	105 楊智勝x4	111 林煒傑x4

同學們：

數學科的老師們爲了鼓勵同學們踴躍參與月刊的活動與作答，特地自籌獎金、獎品，就等同學來領取，不怕沒禮物，就怕你不來！詳細規則請看右手邊的內容。

數學科編輯部　歡迎您來挑戰！

數學好康攏底這！

獎勵辦法

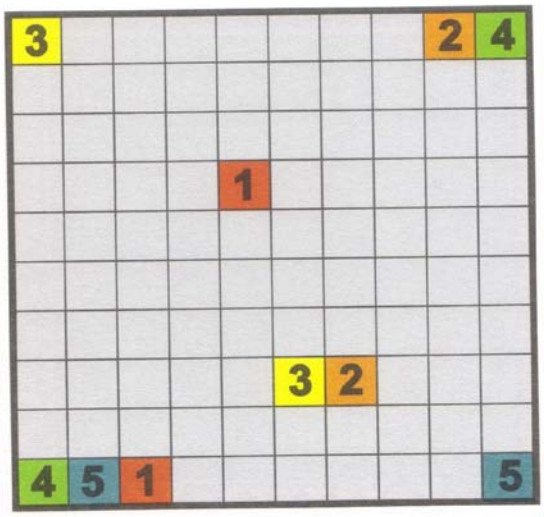
1. 凡屬於月刊中的活動，投稿經老師們票選後刊出者，每人 100 元獎金。
2. 凡參加月刊中各種解題答對者，每滿三題即可抽獎一次。
3. 凡週考成績表現優異且榜上有名者，亦可抽獎一次。
4. 活動本期即生效（下週五 8/11 開始領取或抽獎）

※只要有抽獎，必可獲得精美文具用品一份。

動動腦時間

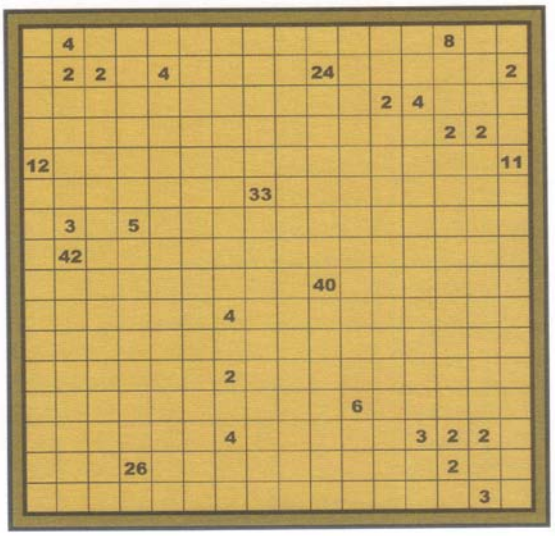
76 數連 4

請幫空格著上不同的顏色，讓相同數字的格子可以連接成一條同色路線。圖中每個空格都有路線通過，但每一格只能通過一次，路線不能交叉或分叉。答案請見284頁。



114 空間分割 5

請將下圖切割成大小不等的長方形，每個長方形內只有一個數字，數字表示長方形內的方格數。答案請見277頁。



99 奇怪的圖畫 1

在這張圖裡，有幾處不合常理之處，你能找出這些奇怪的地方嗎？ 並用紅筆將它圈出來(至少有 5 處，但不超過 10 處!)

每答對 3 個就可摸彩一次!

參考資料來源：蒂姆　戴多普羅斯（2010）。哈佛給學生做的 1001 個思維遊戲。禾風車出版。

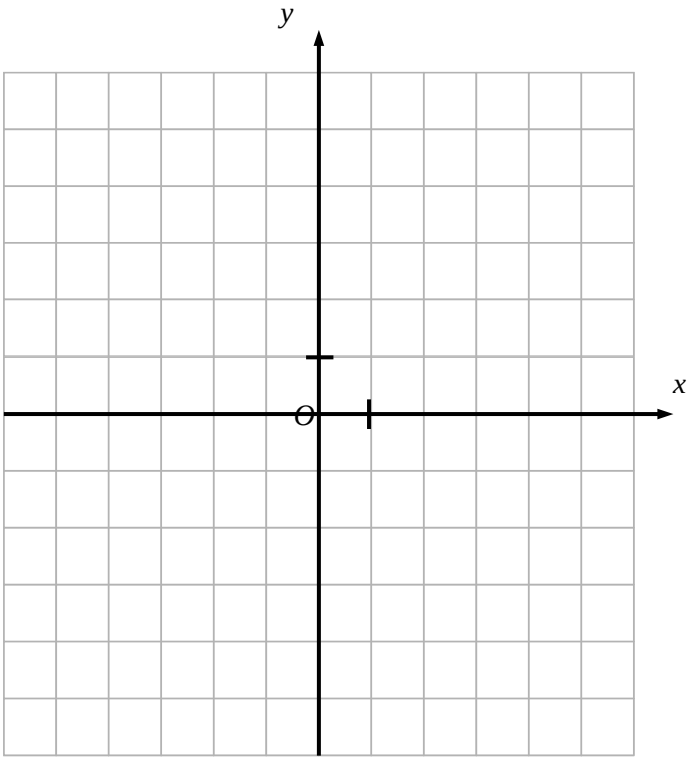
	7		9		8	1		
		8	1		2		3	
	9		7		6	4		
	5	4				8	9	
	1	3				2	4	
		6	5		3		7	
	3		4		9	6		
		5	2		7		8	

_____年 _____班 姓名：_____

7	5				2		9	4
	3	9				7	2	
9			2		5			1
		7	1		4	9		
4			6		3			7
	4	1				6	7	
2	7		9				1	8

_____年 _____班 姓名：_____

如果麥當勞的圖案（如上圖）視爲二個拋物線的組合，那麼我們可以說：上圖右的拋物線是經由上圖左的平移而得到，現在，能否請你將這樣的一個圖案繪於右側的方格子中**(可忽略圖形中的寬度，或是考慮圖形寬度中間的交點位置)**，並根據你所繪製的圖形，找出它的原二次函數（左邊拋物線）及平移後的新二次函數（右邊拋物線）。當然，如果你在生活中也發現有些熟悉的圖案也是拋物線，也歡迎您將它畫於右圖中，然後將它投入月刊信箱。



原二次函數：

新二次函數：

班級： 座號： 姓名：

請找出下列二元一次式在化簡時發生錯誤的地方，並算出正確的答案於下面空格中。

(1) $-2(-3x-4y+9)$

$=6x-8y+1$

(2) $-2x-9-7+3x-2y$

$=x-2-2y$

(3) $\frac{2}{3}(x-2y+1)-\frac{1}{2}(3x-2y-1)$

$=4(x-2y+1)-3(3x-2y-1)$

$=-5x-14y+7$

班級： 座號： 姓名：