求一術的出路：同餘理論有何教學價值與意義？

洪萬生
台灣師範大學數學系

一、前言

所謂「求一術」是指中國古代用以求解《孫子算經》「物不知數」題（參見圖一）的一種方法。這一方法在現代數論 (number theory) 中，當然連結到同餘 (congruence) 理論。事實上，一旦掌握了同餘理論，不僅求一術相關問題，其他一些初等算術中的可除性 (divisibility) 判別法則－譬如一個自然數可以被 13 整除的充要條件爲何等等，當然也變得十分淺顯易解。

理論誠然必須擺在數學學習的第一順位。目前，學生學習的一個通病，顯然是升學競爭所造成的知識之徹底零碎化－其實，這也是一百多年前，德國偉大數學家克萊因 (Felix Klein, 1849-1925) 所批判的煩瑣章句之學，而其代價則是知識的系統性理解之欠缺。爲了導正這種流弊，我們認爲在教學過程中，教師應盡力協助學生培養系統性或結構性的理解。

當然，我們也承認在高級中學的數學課程中，有些知識或方法不是那麼容易形成一個系統或結構，不過，適當地組織一些單元，似乎還是可以「風雅地」介紹有一點結構意義的內容。這樣子說，並不表示現行教科書缺乏結構，只是在課堂上徒然增加許多解題活動，而無從利用論證來引進結構，顯然導致學生領略不到知識學習的核心價值與意義。

在本文中，我打算以讀者所熟悉的「物不知數」題爲例，說明當它被納入同餘理論的一部份時，所謂的理解應該可以更加深入一層才是。這一觀察部分來自我自己的教學經驗。去年秋季班，我擔任本系大一「數學導論」課程教學，本文附錄的第一題，就是我要求學生解答的作業之一。另一方面，我將這一題連同第二、三題，構成一個「問題與討論」的作業，要求選修數學史的學生（主要是大學四年級）回答。在下文的第二節，我引述了某學生甲的期末報告中有關這一作業的反思，藉以考察他的理論 vs. 方法的學習心得。

此外，這種極端重視方法的學習，當然也可能呼應傳統中算論證風格，因此，我們也將簡要對照中國清代數學家如張敦仁、駱騰鳳以及黃宗憲的「求一」心得，以及德國偉大數學家高斯的同餘理論。不過，顯然是出自直接學習西方數學的影響，二十世紀初終於有清末數學家陳志堅在他的《求一得齋算學》(1904) 指出：以不定方程解析「物不知數題」（求一術）以及「百雞問題」（百雞術），則兩術不難貫爲一條。按：「百雞問題」出自與《孫子算經》大約同時的《張丘建算經》，中國數學家直到大約 1820 年代，駱騰鳳才得以提出一個具有理論意義的解法。在本文中，我們也將略作介紹，並轉述駱騰鳳的研究成果。

二、某學生甲的學習心得

在去年 (2008) 上學期的「數學史」結束時，我要求選課的學生（主要是大四學生）就下列問題，提出他們的反思：

請詳細說明本課程在哪一個概念、方法(解題或證明)、理論、經典、數學家

改變或充實了你的看法？試逐條舉例詳述之。

結果，有一位學生甲針對期中一份問題與討論（參見本文附錄），發表他的心得，值得全文引述如下，[1]

我對連結「物不知數題」與「中國剩餘定理」那堂課的內容印象很深刻。教授給我們《孫子算經》裡的一段文字，如下：

今有物不知其數，三三數之賸二，五五數之賸三，七七數之賸二，問物幾何？

答曰：二十三

術曰：三三數之賸二，置一百四十；五五數之賸三，置六十三；七七數之賸二，置三十。并之得二百三十三。以二百一十減之，即得。凡三三數之賸一，則置七十，五五數之賸一，則置二十一，七七數之賸一，則置十五。一百六以上，以一百五減之，即得。

然後要我們理解這番話，寫下它的解法，並將之推廣。一開始，我先用高中的解法，如下：設此數為 N

$$N = 3\cdot 5\cdot 7a + p \ \ (0 \le p \le 104)$$
$$= 3\cdot 5\cdot 7a + 5\cdot 7b + q \ \ (0 \le b \le 3; 0 \le q \le 34)$$
$$= 3\cdot 5\cdot 7a + 5\cdot 7b + 7c + 2 \ \ (0 \le c \le 4)$$

因為用 5 除餘 3，所以 c＝3；因為用 3 除餘 2，所以 b=0，

故得 N＝105a+23＃

另解：

$$\begin{cases} 3 \mid N-2 \\ 5 \mid N-3 \\ 7 \mid N-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 105 \mid 35N-70 \text{--}(1) \\ 105 \mid 21N-63 \text{--}(2) \\ 105 \mid 15N-30 \text{--}(3) \end{cases}$$

$(2)+(3)-(1) \quad \therefore 105 \mid N-23$　故取 N 最小值為 23＃

交給代數操作，很快的找出答案來了，可是當我回過頭思索文字內容，我卻從看不懂它的方法！？是中文不好，還是數學不好？我很疑惑 140、63、30 怎麼來的，以及為什麼要找出分別用 3、5、7 除餘 1 的數(70、21、15)，即使在我第二個解法中湊出了 70、63、30，但我以為也只是乘上了某個倍數得來的，沒仔細想過原理和意義，但教授要點醒我們的也許就是這個了！若只透過操作與計算得到的結果，而忽略它的道理，沒把它的精隨吸收進去，那麼做了上百題上千題題目也無濟於事。陳創義教授也一再提醒我們要把數學融入思考裡！

70 是可被 5、7 整除，但用 3 除餘 1 的數，而原數除以 3 要餘 2，故 70×2＝140，同理 63 和 30，接著即可寫出

N＝（140＋63＋30）－（105）× 2＝23＃

如此（140＋63＋30）用 3 除餘 2、用 5 除餘 3、用 7 除餘 2，而要減掉（105）×2，是因為知道 105 個數一循環，我們要找到符合條件的最小正整數，於是才扣掉 210，把答案控制在 105 以內。在解讀方法之後，我們終於知道如何去把一次同餘式的解給一般化了！

[1] 此處轉述學生之期中、末報告，事先曾徵求這一位學生（此處暱稱爲甲）的同意，謹此申謝與聲明。

比方說：$\begin{cases} x \equiv r_1 (\bmod p_1) \\ x \equiv r_2 (\bmod p_2) \\ x \equiv r_3 (\bmod p_3) \end{cases}$，其中 p_1、p_2、p_3 兩兩互質，求最小正整數 x

我們則先找出 a、b、c，使得 $\begin{cases} a \equiv 1 (\bmod p_1) \\ b \equiv 1 (\bmod p_2) \\ c \equiv 1 (\bmod p_3) \end{cases}$

$\therefore x = (ar_1p_2p_3 + br_2p_1p_3 + cr_3p_1p_2) - [p_1, p_2, p_3] \times K$　K 為某正整數 #

當然，四個或更多個一次同餘式聯立的情況，也可仿製此法，這就是教授所強調的「推廣」的重要性，倘若一個解法只適用於某些特殊題目時，那何須強記呢？只要改個形式，就又令人百思不得其解了，重要的是「實用」與「一般化」，讀大學四年，若只訓練出解高中所謂資優難題的能力，或者總是見招拆招、沒有一套中心概念的話，那讀數學系真的太浪費了，如同教授在課堂上舉出高斯的例子，證明費馬最後定理對他沒意義，那些特殊解法對我們同樣沒有意義，我們得好好反思這點。

而另一方面，以「物不知數題」連結至「中國剩餘定理」，可見這樣一個表現出「一般性」的「特例」非常成功，假使哪天我們成了教師，我們會怎麼教？這似乎也給了我們一些改善教學的好意見，多虧教授這麼用心，讓一個名題發揮它的價值與意義，更讓我們省思這麼多，謝謝。

不過，學生甲在回答那個「問題與討論」時，針對其中問題二：

如果你學過中國剩餘定理（當然含其證明），那麼，這對於你回答上述問題〔按即：問題一〕時，有無幫助？請說明之。

他的回答如下：

有幫助。利用中國剩餘定理比較容易抓到規律。由 [3, 5, 7]=105 知每 105 個就會循環一次。因此，也可知 23 之後，23+105n，n 為自然數，應可符合三三數之賸二、五五數之賸三、七七數之賸二此規則。

儘管如此，針對問題三：

如果你學過中國剩餘定理，請問你是將它當成一個方法 (method) 來學，還是當成某個理論的一部份來學？請解釋你的答案。

他的回答卻是：

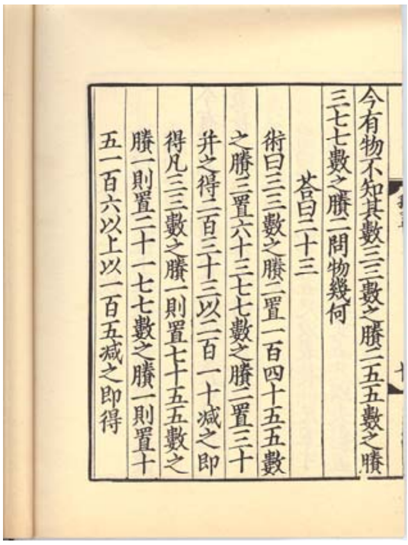
當成一個方法應用在生活上！才實用！

可見，在期末報告的反思中，他對於理論與方法的角色其實有了更深刻的體會了。

三、從「物不知數題」到中國剩餘定理

求一術始見於《孫子算經》，不過，將它集大成的南宋秦九韶，在他的《數學九章》中，卻完全不曾提及。到了明代，雖然算學家將物不知數題的「術曰」編成歌訣以廣流傳，似乎也收到了普及的效果，譬如明代程大位《算法統宗》(1592) 中，就有孫子歌曰：「三人同行七十稀，五樹梅花廿一支，七子團圓正半月，除百令五便得知。」

不過，真正有進一步發展的時期，則是要等到清中葉之後。乾隆時編四庫全



今有物不知其數三三數之賸二五五數之賸
三七七數之賸二問物幾何
荅曰二十三
術曰三三數之賸二置一百四十五五數
之賸三置六十三七七數之賸二置三十
幷之得二百三十三以二百一十減之即
得凡三三數之賸一則置七十五五數之
賸一則置二十一七七數之賸一則置十
五一百六以上以一百五減之即得

圖一：宋版《孫子算經》
「物不知數」題書影

書，編者從《永樂大典》中抄出《數學九章》，四庫版再經過李鋭校訂後，張敦仁、駱騰鳳、時曰醇以及黃宗憲等，都有所發明。在此，我們只提及當時有關求一術起源的一些看法，然後，再回來簡介秦九韶的大衍求一術。

張敦仁《求一算術》(1803) 序：「筭數之學，自九章而後，述作滋多，其最善者則有二術。一曰立天元一，一曰求一。盡方圓之變，莫善於立天元一，窮奇偶之情，莫善於求一。求一之術出於《孫子筭經》物不知數之問。」可見，當時數學家對於求一術的重視。

此外，左濳爲黃宗憲《求一通解》作序時，也指出：「近日精算諸家，後先接踵，精思妙理，鑿險通幽其因仍舊術而絕無增變者，為大衍一術已耳。」這是因爲他認爲「《孫子筭經》物不知數一題，以三、五、七立算，在大衍題尚為淺顯，經中有術無草，殆未深求至理，原非有意故秘機緘。」至於論及秦九韶著述《數書九章》時，則認爲他「始立約分求等、求乘率諸法，數雖繁瑣，理實精深，後之攻是術者，皆未能洞悉其源，是以於所以然之理，具未能切近言之也。」

回到中國南宋時期，秦九韶 (1202-1261) 在他的著作《數書九章》(1247) 中，將此問題推廣到任意的模數（非兩兩互質）及餘數。至於此求解的方法，就稱爲「大衍總數術」，是先將模數化爲兩兩互質，再用「大衍求一術」去求解，對相關的理論和算法，作了集大成的工作。

事實上，「物不知數題」經由秦九韶的一般化，的確是高斯 1801 年所發表的相關定理之先聲，因此，西方國家稱此類型的問題爲「中國剩餘定理」(Chinese Remainder Theorem)，的確合乎情理。至於孫子與秦九韶的貢獻，則多虧了傳教士偉烈亞力 (Alexander Wylie) 1856 年在 *North China Herald*（《北華捷報》）所發表的論文 "Jottings on the Science of the Chinese Arithmetic"（中國算術論叢）。本論文先翻譯成德文，再翻譯成法文，在歐洲學術界流傳甚廣，因此，此一定理最後冠上形容詞「中國的」(Chinese)，並且出現在歐美一般的數論或代數教科書上，才

顯得相當水到渠成。

現在，且讓我們說明中國剩餘定理如何與秦九韶的「求一」有關了。中國剩餘定理當然涉及下列一次同餘式的聯立解：

$N \equiv R_i \pmod{m_i}$, $i= 1, 2, 3,\ldots, n$ 且當 $i \neq j$，m_i，m_j 互質。如令 $M=\prod_{i=1}^{n} m_i$（乘積），則存在有 K_i，使得 $K_i \dfrac{M}{m_i} \equiv 1 \pmod{m_i}$, $i = 1, 2, 3,\ldots, n$，於是

$N \equiv \sum_{i=1}^{n} K_i \dfrac{M}{m_i} R_i \pmod{M}$ 即爲所求。

這裡解法的關鍵，當然就在於如何轉換成爲「求一」的問題了。至於如何求一呢？請看秦九韶的「大衍求一術」：

> 大衍求一術云：置奇右上，定居右下，立天元一於左上。先以右上除右下，所得商數與左上一相生，入左下。然後乃以右行上下，以少除多，遞互除之，所得商數隨即遞互累乘，歸左行上下。須使右上末後奇一而止，乃驗左上所得，以為乘率。

試以 $K \cdot 20 \equiv 1 \pmod{27}$ 爲例：

1　20	→	**1　20**	→	**3　6**	→	**3　6**	→	**23　1**
0　27		**1　7**		**1　7**		**4　1**		**4　1**
		27=1× 20＋7		20=2× 7＋6		7=1× 6＋1		6=5× 1＋1
		1× 1＋0=1		2× 1＋1=3		1× 3＋1=4		5× 4＋3=23

得到 K=23　。

事實上，秦九韶對於「物不知數」題的延拓，還涉及非整數的模數，這是目前所謂的「中國剩餘定理」的版本之所缺，值得我們注意。

四、《張丘建算經》的「百雞術」

所謂的百雞問題（參見圖二），出自南北朝時代算書《張丘建算經》，原文引述如下：

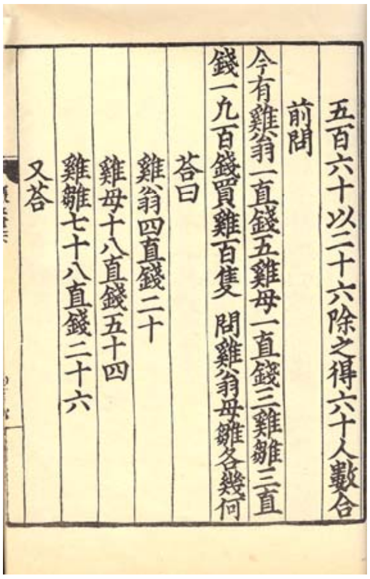
> 今有雞翁一，直錢五；雞母一，直錢三；雞雛三，直錢一。凡百錢買雞百隻，問雞翁、母、雛各幾何？
>
> 答曰：雞翁四，直錢二十；雞母十八，直錢五十四；雞雛七十八，直錢二十六。雞翁八，直錢四十；雞母十一，直錢三十三；雞雛八十一，直錢二十七。雞翁十二，直錢六十；雞母四，直錢十二；雞雛八十四，直錢二十八。
>
> 術曰：雞翁每增四，雞母每減七，雞雛每益三即得。

如設 x, y, z 分別代表雞翁、雞母、雞雛各買之數，則依據題意，可得下列聯立方程：

$$x+y+z=100$$

$$5x+3y+\frac{1}{3}z=100$$

運用方程相消未知數，以及不定方程的整數解求法，即可驗證上述答案全部正確。問題是：張丘建究竟如何得知？原書的術曰實在太過簡單，對於我們的解題實在



五百六十以二十六除之得六十人數合
前問
今有雞翁一直錢五雞母一直錢三雞雛三直
錢一凡百錢買雞百隻　問雞翁母雛各幾何
荅曰
雞翁四直錢二十
雞母十八直錢五十四
雞雛七十八直錢二十六
又荅

圖二：《張邱建算經》
「百雞問題」書影

沒有什麼幫助。不過，話說回來，雖然對後來的算學家而言，所需之方法（如方程相消與輾轉相除）都已齊備，然而，就是必須等到 1820 年代的清中葉數學家駱騰鳳，才首次正確地解出這一問題。

根據陳鳳珠 (2001) 的研究，駱騰鳳乃是結合了「三色差分法」與「大衍求一術」，而解決這一懸宕已久的歷史名題。此處，我們引述陳鳳珠利用現代符號所「翻譯」的解法，以供讀者參考：

1. $15x+9y+z=300, x+y+z=0$
2. 兩式相減，得 $(15-1)x+(9-1)y=200$ ，即 $14x+8y=200$ (1)
3. (1)÷2 得 $7x+4y=100$ 知 $4y\equiv 0=R_1(\mathrm{mod}\,4)$ ，$4y\equiv 2=\mathrm{R}_2(\mathrm{mod}\,7)$ 。
4. $M=4\times 7=28$ ，$M_2=4$，$4\equiv 4(\mathrm{mod}\,7)$ ，得 $K_2=2$ 。
5. $W_2=K_2\times M_2=8$ ，$U_1=0$ 、$U_2=R_2\times W_2=16$ ，$4y=(U_1+U_2)-0\times M=16$ ，得 $y=4$ 。
6. $x=(100-16)\div 7=12$ ；$z=100-12-16=84$ 。
7. 知 $7(x-4)+4(y+7)=100$ ，$7(x-8)+4(y+14)=100$ ；得 (x,y,z) 三解爲：$(12,4,84)$ 或 $(8,11,81)$ 或 $(4,18,78)$ 。

陳鳳珠在她的碩士論文中，當然引述了駱騰鳳的原文，其中充滿了大衍求一術的術語，如「定母」、「衍母」、「衍數」以及「用數」等等，[2]足見這一位清中葉數學家還是可以推陳出新，統整出一個具有理論意義的研究成果出來。

五、高斯的貢獻

當高斯 (1777-1855) 在 1801 年出版《算學講話》(*Disquisitiones Arithmeticae*) 時，他才 24 歲。本書是近代數論研究進入十九世紀的里程碑，也代表這門學科

[2] 針對「物不知數題」而言，所謂的「定母」是指 3，5，7；「衍母」是指 105；「衍數」是指 35，21，15；「用數」則是指 140，63，30。

從此有了理論結構，超越了個別解題方法的收集之格局。後者主要是十八世紀數論大師勒讓德 (Legendre) 的風格，他的《數論研究文篇》(*Essai sur la theorie des nombres*, 1798) 歸納了截至當代的主要研究成果，譬如有關質數、二次式、連分數等等，都羅列在內，甚至他還提供了一張整數表，說明其各自的整數性質。相反地，高斯雖然處理了同樣的單元，但卻尋求定理以便揭露其底蘊的結構，譬如說，他就給出了整數因數分解唯一性的第一個存在性證明，而不只是提供解法而已。無怪乎數學史家都將高斯視爲上承十八世紀、下啓十九世紀的偉大數學家，因爲他不只精通十八世紀的解題，而且還開拓了十九世紀重視結構面向的數學風格。

《算學講話》中有一個部分專門處理整數的同餘（請注意："≡" 這個同餘記號是他所發明的），值得在此稍加介紹，以便讓讀者對於高斯所建立的理論結構，有一個起碼的認識。這一短短篇幅的一節細分成有十一個小節，1、2、3 小節主要定義同餘數 (congruent numbers)、模數 (moduli)、留數 (residues) 與非留數 (non-residues)，並推演簡單的性質與定理。第 4 小節專論最小的留數 (least residue)。第 5 小節介紹幾個有關同餘數的命題，比如說吧，相對於一個合成的模數 (composite modulus)，有一些數同餘，則相對於這個合成數的因數而言，這

圖三：10 馬克的高斯肖像鈔票
（原德國發行，現已停用）

些數必然也會同餘。第 6、7、8 小節介紹同餘的運算法則：相對於任意模數而言，如果 $A \equiv a, B \equiv b, C \equiv c$ 等等，則 $A+B+C$ etc. $\equiv a+b+c$ etc.，而且 $A-B \equiv a-b$。還有，若 $A \equiv a$，則 $kA \equiv ka$；若 $A \equiv a, B \equiv b, C \equiv c$，則 $ABC \equiv abc$；以及若 $A \equiv a$，且 k 爲一正整數，則 $A^k \equiv a^k$。第 9、10、11 小節則結合同餘式與整係數方程式的有理數解，作了一個初步的討論。最後，在第 12 小節，高斯提出若干應用，他主要指出有關可以被 9、11 或其他數整除的判別法則，都可以歸結到前述定理的應用。

六、結論

從數論的結構觀點來看，高斯的同餘理論代表了理論拔高的特殊意義，並顯現了它在教學方面的普世價值。因此，以「求一術」爲例，如果我們要想將其相關概念與方法鋪陳出一點結構趣味，那麼，引進同餘理論，當然是唯一的出路！二十世紀初，中國清末數學家陳志堅的貫通「求一術」與「百雞術」爲不定方程

解析，儘管頗爲難得，然而，還是欠缺理論高度。

誠然，「物不知數題」與「百雞問題」都是極有意義的數學名題，圓滿地解決它們當然可以帶動數學的進步與發展。這也是問題及其解決 (problem-solving) 成爲數學的靈魂的主要原因之一。不過，話說回來，要是缺乏理論建構的視野，那麼，解題所能帶來的數學發展，大概就不無限制了。這個推論，應該也可以適用於中小學的數學學習。刁鑽古怪的難題測驗在東亞國家的數學教育評量或入學考試中，似乎是個極普遍的現象，這或許也解釋了這些國家的國際數學教育評比之名列前茅。然而，他們共同的重術輕理，應該也很難否認。日本數學史家平山諦曾就和算的「遺題繼承」之發展，提出他的評論：

> 這種「難問注意」的流行以及以極其複雜的計算為主的傾向，導致了輕視理論的弊端。今天的入學考試不也存在類似現象嗎？

這是日本的數學教育現實，我們似乎也不遑多讓才是。如此看來，如何折衷理論與解題，絕對是我們身爲教師者無法迴避的重大課題了。

參考文獻

CBMS (Conference Board of the Mathematical Sciences) (2001). *The Mathematical Education of Teachers*. http://www.cbmsweb.org/MET_Document/index.html.

Courant, Richard and Herbert Robbins (revised by Ian Stewart) (1996). *What Is Mathematics?* New York / Oxford: Oxford University Press.

Gauss, F. (1959). “On the Congruence of Numbers”, David Smith E., eds., *A Source Book in Mathematics* (New York: Dover Publications, INC), pp. 107-111.

Grattan-Guinness, Ivor (1997). *The Rainbow of Mathematics*. London: Fontana Press.

Libbrecht, Ulrich (2005). *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century*. New York: Dover Publications, INC.

Ore, Oystein (1988). *Number Theory and Its History*. New York: Dover Publications, INC.

Struik, Dirk (1987). *A Concise History of Mathematics* (Fourth revised edition). New York: Dover Publications, INC.

平山諦 (2005).《東西數學物語》(代欽中譯)，上海：上海教育出版社。

李儼 (1998).〈大衍求一術的過去與未來〉，收入郭書春、劉鈍主編，《李儼 錢寶琮科學史全集》第六卷（瀋陽：遼寧教育出版社），頁 116-163。

孫子 (1981).《孫子算經》，收入《宋刻算經六種》，上海：上海古籍出版社。

秦九韶 (1993).《數書九章》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通匯・數學篇》（一），頁 439-724 廿。

張敦仁 (1993).《求一算術》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通匯・數學篇》(五)，頁 95-139。

陳鳳珠 (2001).《清代算學家駱騰鳳及其算學研究》，台北：國立台灣師範大學數學系碩士論文。

黃宗憲 (1993).《求一術通解》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通匯・數學篇》(五)，頁 1119-1144。
楊瓊茹 (2009).〈求一與占卜〉，載洪萬生等，《當數學遇見文化》(台北：三民書局)，頁 72-83。
楊瓊茹 (2009).〈剪管術 vs. 天算頌〉，載洪萬生等，《當數學遇見文化》(台北：三民書局)，頁 151-160。
蘇意雯 (2009).〈遺題繼承，串起中日數學史〉，載洪萬生等，《當數學遇見文化》(台北：三民書局)，頁 172-183。

附錄

數學史問題及討論（2008/10/28）

姓名：
Email:

一、下列問題是大一「數學導論 A」的第一次考試題目之一，目的是連結「物不知數題」與「中國剩餘定理」(Chinese Remainder Theorem)：

In an ancient Chinese mathematical text, there is a famous problem with its solution:

今有物不知其數，三三數之賸二，五五數之賸三，七七數之賸二，
問物幾何？
答曰：二十三。
術曰：三三數之賸二，置一百四十；五五數之賸三，置六十三；
七七數之賸二，置三十。并之得二百三十三。以二百一十減之，
即得。凡三三數之賸一，則置七十，五五數之賸一，則置二十一，
七七數之賸一，則置十五。一百六以上，以一百五減之，即得。

Try to generalize the solution to this problem. Write down what you think as much as possible.

你認為如何回答比較好？為什麼？

二、如果你學過中國剩餘定理(當然含其證明)，那麼，這對於你回答上述問題時，有無幫助？請說明之。

三、如果你學過中國剩餘定理，請問你是將它當成一個方法 (method)來學，還是當成某個理論的一部份來學？請解釋你的答案。

作者附記：本文同時刊登於《數學快遞》第二期。