

《這才是數學》推薦序

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

書名：這才是數學：從不知道到想知道的探索之旅 (*Measurement*)

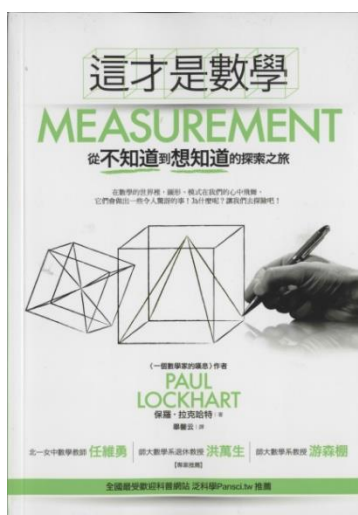
作者：保羅·拉克哈特 (Paul Lockhart)

出版社：經濟新潮社，台北市

出版年：2015

出版資料：平裝本，414 頁

國際書碼：ISBN 978-986-6031-66-3



何謂數學？保羅·拉克哈特現身說法，利用本書來解說他的答案：數學是一門研究模式的科學（*science of pattern*）。

不過，想要回答此一問題，我們也可以簡短回顧這種知識活動的歷史軌跡。考察古埃及、巴比倫乃至中國的數學的發展歷程，到公元前 500 年左右，所謂數學是指與數目相關的一種學問。以中國漢代數學經典《九章算術》為例，數學所指涉的活動幾乎都以「算術」為主。顯然，它的內容以實用為依歸，至於方法則依循「食譜」的特色：「對一個數目這樣做、那樣做，那麼，你將會得到答案。」

從大約公元前 500 年到公元 300 年間，是希臘數學的輝煌時期。古希臘的數學家主要關心幾何學，而且訴諸於嚴密推理與形式證明，以建立牢固的數學知識結構。因此，對於古希臘人而言，除了研究數目之外，數學主要是有關形狀的一門學問。

儘管如此，到十七世紀為止，數學大都侷限於計算、度量和形狀之描述的靜態問題。相對地，牛頓與萊布尼茲在各自獨立發明的微積分這一門學問中，引進

處理運動和變化的方法之後，數學家終於可以研究行星的運行、地球的落體運動、液體的流動、氣體的擴散、電力和磁力、飛行，乃至於動植物的生長等等自然現象。因此，在這兩位發明微積分的偉大數學家之後，數學變成了研究數目、形狀、運動、變化以及空間的一門學問。

不過，大約十八世紀中葉之後，有感於微積分的無遠弗屆威力，數學家著手瞭解其背後的原因究竟，從而對數學知識本身產生了遞增的興趣。於是，古希臘形式證明的傳統，捲土重來掌握了優勢。因此，到了十九世紀末為止，數學已經成為有關數目、形狀、運動、變化、空間、以及研究數學的工具的一門學問了。

在最近的四十年間，數學家對於「何謂數學」之說法，則一如前述：數學是研究模式的一門科學。誠如拉克哈特指出，數學家的職責就是探索或檢視抽象的模式。這些模式可以是真實存在或想像的、視覺性或心智性的、靜態或動態的、定性或定量的、純粹功利或有點超乎娛樂趣味的。它們可以源自我們的週遭世界，或者源自心靈的內部運作。不同種類的模式當然引出不同的數學分支，譬如說吧，幾何學研究形狀的模式；微積分允許我們處理運動的模式。而這兩種模式，正是拉克哈特在本書中現身說法之主要依據。

針對幾何學研究，拉克哈特強調它「與其說是關於形狀本身，不如說是關於定義形狀的遣詞用字模式 (vocal pattern)。幾何的中心問題，是抓住這些模式並做出量度 — 這些數本身，也必須具有遣詞用字模式。」至於在本書下篇中，作者引進微（積）分方法，部分原因顯然出自對比（量度）方法論的考量。請看拉克哈特如何說明：「我總是喜歡拿古代研究幾何量度的方式，來和近代的研究方式比較一下。希臘古典想法是把量度按住，然後做分割；十七世紀的方法則是任它四處跑，觀察它的變化。」儘管如此，他在說明如何「量度」圓面積時，還是指出古典方法（如窮盡法）的深刻動人：「我們做的近似值並不只是少幾個，而是無窮多個。我們其實做了一連串無止境，一次比一次接近，而從這些近似值可以看出一種模式，告訴我們最終會趨向什麼結果。換句話說，透露出某種模式的無窮多個『慌言』(lies)，竟能告訴我們真理。」

對於拉克哈特來說，模式之為用大矣！在說明餘弦定律針對銳角、直角與鈍角三角形都有效時，拉克哈特強調：「要讓模式來決定我們對於意義的選擇。數學這門學問就是圍繞這個主題；我們甚至可以說，這是這門藝術的本質—聽從模式，來調整自己的定義和直觀。」

我希望上述簡短的說明及引述，多少可以傳達我如何喜愛這一本數學普及著作。事實上，作者罕見的敘事功力，讓本書處處洋溢著極其睿智的洞識，譬如在說明餘弦定律的意義時，拉克哈特就指出：「這個公式告訴我們一件事：角度與長度彼此沒有直接關係；角度必須透過餘弦，來間接傳遞訊息。就好像角度需要一位裝扮成餘弦的律師，代替它們去和長度打交道。角度與長度身處不同的世界，

說著不同的語言。正弦和餘弦擔任字典的角色，把角度的語言轉換成長度語言。」我想一般的數學老師大概都能說出上引文字上半部分的含意，但是，下半部分的比喻，恐怕就不那麼容易想得到了。

其實，拉克哈特針對證明 vs. 敘事，也有著十分精彩的比喻：「數學證明就像在說故事。題目中的元素就是人物角色，故事情節則由你決定」。這是因為「就像任何一篇文學小說，我們的目標是寫出在陳述上令人信服的故事。」而「在數學上，這表示情節不僅要合乎邏輯，還必須簡明而優雅。沒有人喜歡看拐彎抹角又複雜的證明。我們當然想看到理性的思路，但也希望感受到美的震懾。一個證明應該兼顧美感與邏輯。」

總之，本書一如作者稍早出版的《一位數學家的嘆息》，十分坦誠且帶有強烈的個人風格。然而，對比前書的教育改革之基進主張，本書完全著重在數學探險之旅的驚喜與樂趣。儘管作者所舉的案例都取自古典數學（尤其是古希臘幾何學），不過，其論述之直指核心，以及敘事之詩意思象，都讓本書成為中學數學普及讀物的上上之選。因此，我要向大學數學通識師生與中學數學師生鄭重推薦本書，當你有機會閱讀本書時，你一定會發現：原來數學可以這樣學習！至於一般讀者呢，接觸本書一定可以體會：你在過往的數學知識活動中，究竟錯過了什麼！