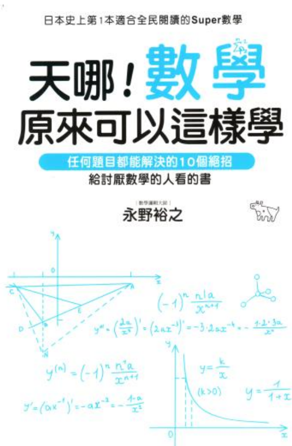
推薦《天哪！數學原來可這樣學》

洪萬生
台灣師範大學數學系退休教授

書名：天哪！數學原來可這樣學
作者：永野裕之
出版社：漢湘文化事業有限公司，新北市
出版年：2013
出版資料：平裝本，268 頁
國際書碼：ISBN 978-986-225-229-1



一、前言

從數學普及的觀點來看，本書是相當奇特的一本著作，因為它看起來像是一種高中數學參考書。可是，作者又能在精巧絕妙的解題之外，揮灑他對數學知識及其學習方法的洞識，真是令我們大開眼界。

本書作者永野裕之是數學補習班的班主任，以個別指導為主，除了學生之外，他也指導成年人。本書可視為他自己的困而學之與指導學生的心得報告。他出身東京大學理科，主修宇宙學。不過，他的成長背景有一些非常值得注意的現象，譬如他從小數學成績極差，本來不可能通過東大數學考試，然而，他在高二下發憤圖強，找到自己的學習方法與節奏，竟然得以參加日本的數學奧林匹亞活動，並代表東京都參加廣中平祐主辦的「第 12 屆數理之翼講座」。[1]

[1] 廣中平祐是日本數學家中榮獲費爾茲獎（Fields Medal）的第二人（拔得頭籌者為小平邦彥），因此，永野裕之年少時得以參加那個講座，親炙大師的現身說法，這對於他目前的補習班教學與科普事業，想必有著非常深刻的啟發才是。

我粗略瀏覽本書，發現他除了針對數學解題，提供一些發人深省的獨到心得之外，[2]在〈前言〉中，作者還向「文科」的人喊話，強調他們更應該學習數學。他特別指出：

> 在我的補習班裡，能在短時間內克服原本棘手的數學的學生，都有個共通之處，那就是國語文能力相當優秀。尤其是擅長建立脈絡撰寫文章的學生、能把他人所說的事物，改用自己的話語講述的學生，因為他們運用邏輯思考事物的基礎十分紮實，所以，傳授正確的學習訣竅給他時，就能夠立刻吸收進去，一下子就把數學能力提高了。
>
> 在學生時代，「因為我是文科，所以……」而放棄數學的人很多，這是非常可惜的事。文科學生經常自己把自己貼上「我是不懂數學的人」的標籤，但多數是誤會一場。在許多場合，數學拿手和國文拿手常被認為是相反的能力，但這也是大錯特錯。如果讓我來說的話，「國文很拿手，但數學（算術）很差勁。」這句話真是矛盾之至。這句話的意思就等同於：「我用了錯誤的方法學習數學。」如果國文很拿手，如果對閱讀、寫作都很有自信，那麼數學也絕對可以搞定。

這是數學普及作品難得出現的主張，值得推廣閱讀的「大人先生們」共同反思互勉。事實上，誠如作者所說的，「這本書是在闡明學生時代飽受數學所苦的成年人為什麼搞不懂數學，以及應該如何學習才能搞懂數學。」所以，無論讀者的數學經驗如何，本書都非常值得參閱，因為我們運用數學溝通的對象，可能都有本書作者所提及的數學學習迷思。

二、內容簡介

本書目錄如下：

[2] 譬如第 3 章〈任何題目都管用的 10 個絕招〉。

・問題集的使用方法
・不拿手的人所欠缺的「解題」基本知能
・擅長數學的人的腦袋
第 3 章　任何題目都管用的 10 個絕招
・第 1 招 降低次數
・第 2 招 找出週期性
・第 3 招 找出對稱性
・第 4 招 逆向思考
・第 5 招 思考和不如思考積
・第 6 招 把它相對化
・第 7 招 進行歸納性的思考實驗
・第 8 招 把它視覺化
・第 9 招 要意識到等價變形
・第 10 招 從終點回溯起點
第 4 章　綜合題目用 10 個絕招來試試吧！

在第 1 章第 1 節「不要死背」中，作者開宗明義指出：學習的訣竅，就在於「不要記住」，[3]因為學習數學就是在學習邏輯。透過數學，發現事物的本質，找出隱藏的規則和性質，而這些絕對無法利用背誦定理、公式和解法來完成。他甚至引述愛因斯坦的一段話，來強化他的說服力：

> 所謂教育，就是把在學校所學的一切全都忘光了之後，殘留在自己心中的東西，〔而〕造就出能夠獨立思考和獨立行動，〔且〕運用這個能力協助解決社會所面臨的諸多問題的人。

然則數學定理和公式都是知識，不靠死背如何學習呢？作者認為如果賦予知識之「意義」，知識就可以昇華為智慧。知識會逐漸遺忘，而智慧則不會。至於如何昇華呢，作者在此將數學知識的主要特性 － 證明 － 請出場，以凸顯它所扮演的必要且關鍵角色：知識如果只是道聽途說得來的，就是單純的知識。「不過，若能透過證明而體驗它的正確性，那麼就不再是知識，而已經成為智慧」。

有關證明，作者舉了兩個國中數學課程的案例：畢氏定理與二次方程式公式解之證明。這些都是一般讀者耳熟能詳的例子，難得的是，作者不厭其煩，苦口婆心地指出證明的關鍵。最後兩節的內容，則分別強調如何自學與製作筆記以整理學習心得。

[3] 在金庸的武俠小說《倚天屠龍記》中，張三丰教張無忌學習太極拳與太極劍的插曲，可以為此一主張做個註腳。

在第 **2** 章中，值得注意的，是作者所提及的「問題集的使用方法」，這是一般人學習數學容易犯的毛病，因為他們缺乏作者所說的「解題」四種基本知能：**文字題要做數學翻譯、除法有兩種意義、意識到圖表與聯立方程式的關係**，以及**輔助線的畫法依「情報量」來判斷**。基於此，作者試圖刻畫「擅長數學的人的腦袋」，這些人只使用「基本思考方法」 － 它們可以歸納為本書第 **3** 章將要介紹的「**10** 個絕招」，以及回歸原理、原則、定義來分解題目。為了達到這個目標，作者指出：「**如果你能養成習慣，對於自己使用的所有定理和公式都能一一加以證明，那麼你就有能力隨時回歸原理、原則、定義。接下來，只要你鼓起勇氣無所畏懼地回歸原點就行了。或許你會以為，這樣做是繞了一大圈，其實，尤其在解決難題之際，這才是最短的距離。**」

第 **3** 章是本書的重點 － 也是賣點！，我們依序簡要說明。

第 **1** 招（第一節）「**降低次數**」也包括降低圖形的「次數」（維度），效能是「使計算變輕鬆，或是立體圖形」。

在第 **2** 招「**找出週期性**」中，作者的重點是引進同餘式，效能是「能夠掌握無限連續的數或非常大的數」。基於同餘式的理論，作者以下列兩例來解說「找出週期性」之意義：例 **1.** 求13^{2000}除以 **12** 時的餘數（按：答案為 **1**）；例 **2.** 求斐波那契數列的一般項$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\}$。

第 **3** 招是「**找出對稱性**」，其中包括圖形對稱與對稱方程式，效能是「把看到的東西當成某個整體的一部份來處理，增加資訊量，使它能夠適用於已知的理論或性質」。除了幾何圖形的相關題目之外，作者也以下列兩例說明對稱在代數類問題中的意義：例 **1.** 設$a \neq b$，$a^2 + \sqrt{2}b = \sqrt{3}$，$b^2 + \sqrt{2}a = \sqrt{3}$，求$\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$之值（日本實踐女子大學入學考題）；例 **2.** 解（對稱方程式）$x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 7x + 1 = 0$。

第 **4** 招「**逆向思考**」的效能，在於「採取新的觀點，可以迴避麻煩，或發現通往解答的捷徑。」在本節中，作者也以反證法（或歸謬證法）配合例題，說明逆向思考的進路之意義。

第 **5** 招「**思考和不如思考積**」，主要的考量是「式子的資訊量增加」。作者所舉的例題是京都大學入學考題：求所有滿足$a^3 - b^3 = 65$的整數組(a,b)。作者的基本解題策略是將$a^3 - b^3$這個和（或差）化成（乘）積，以便增加資訊量。

第 6 招「**把它相對化**」，其好處在於「利用減法能發現隱藏的性質。」在本節中，作者以循環小數與階差數列（或稱高階等差級數）為例。針對後者，作者所謂的「相對化」，「就是從全體之中抽出相鄰的兩個，思考它們的差。接著把從『差』導出的相鄰事物的關係累積起來，藉此達到掌握全體的最終目的。」針對這一招，作者所舉的例題是：平面上有 **100** 條直線，其中任意兩條直線都不平行，任意三條直線都不交於同一點，求交點的總數。（北見工業大學入學考題的修訂版）。至於其策略，就是「思考 ***n*** 條直線的交點數量和 ***n*+1** 條直線的交點數量的「差」，如此，就可以得到一個可進一步思考的切入點：$a_{n+1}=a_n+n$，其中 a_n 是 ***n*** 條直線時的交點數。

第 7 招「**進行歸納性的思考實驗**」之進路，是「使用具體數字做思考，藉此發揮想像力，而提出解的假設。」 作者指出歸納在此一關連中的意義，乃是「雖然數學的最終目標，在於使用文字符號做一般性的呈現，但對於眼前看不太懂的題目，填入具體的數字，充分發揮你的想像力，可以說重要之至。」同時，他也指出：「**歸納性思考→提出假設→證明它能一般化，這是在思考未知問題時非常正典的手法。**」至於這種經由歸納所提出的假設是否站得住腳，那就如作者所強調的，必須訴諸數學歸納法來證明了。

第 8 招是「**把它視覺化**」，事實上，圖形「不僅是最大值、最小值問題的特效藥，也使光看數式看不出來的性質變得一目了然。」尤其對於數列和整數的問題，如果使用圖形來思考，常常會一下子變得很簡單。作者舉如下的京都產業大學入學考題為例，說明訴諸圖形的好處多多：數列$\{a_n\}$依a_1，$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+3$，***n*=1, 2, 3, …**定義時，求$\lim_{n\to\infty}a_n$。作者在座標上畫出$y=x$與$y=\frac{1}{3}x+3$的交點，以聚焦解題思維，頗有創意。

第 9 招是「**要意識到等價變形**」，不過，在變形前，必須先瞭解什麼是必要條件和充分條件。而且，也要注意到數學式子的變形，一定要等價變形才可以，否則求解的條件會扭曲，以致於最終解答可能不符合所求。

第 10 招是「**從終點回溯起點**」，目的是幫助讀者「看出證明題的脈絡」。作者在本節第四段中，指出目前中學證明題的評量癥結所在：

> **國中生的證明題與升學考試的證明題，經常是寫好已經完成的證明，再把其中一部份挖空（空欄），要求學生填入適當的數字或數式。對於還不習慣證明題，無法從頭到尾建構證明過程的國中生而言，這種挖空的出題形式或許**

合適，但這也往往會讓學生誤以為這道題目有既定形式的證明方法。

然而，作者再次強調：

證明並沒有既定的形式。一則故事的說法有千百種，同樣地，證明也可以依自己喜好的形式來寫。

由於這一招本質上就是所謂的解析法（**method of analysis**），所以，在假定結論成立的條件下，「想想看，在終點（結論）的前一行要主張什麼比較好。」以如下問題為例：

有一個 $PA = PB = PC$ 的三角錐 $P - ABC$。從頂點 P 到底面 ABC 的垂線的交點為 O。請證明點 O 為三角形 ABC 的外心。

按解析法，「從終點回溯到起點的過程」整理如下：

點 O 為三角形 ABC 的外心

↓

OA＝OB＝OC

↓

ΔPAO **和** ΔPBO **和** ΔPCO **為全等**

↓

PO* 為三角形 *ABC* 的垂線且 *PA*＝*PB*＝*PC

接下來，把這個過程倒推回去，即可完成證明。

最後，作者特別強調：這個絕招並非有「靈光一閃」能力的人所想出來的，而是任何人都能夠合理地思考出來的必然想法。換言之，只要掌握這個絕招，「靈光一閃」就會變成「理所當然」。

三、結論

在本書第 **4** 章中，作者列舉了東京大學的四個入學考題，並且使用他在第 **3** 章所闡述的 **10** 個絕招中的某些個，成功地解出這些相當艱難的題目。譬如說吧，其中最後一個問題是：

證明圓周率比 3.05 大。

作者解答的策略，是運用了本書的第 **7**、**8** 和 **10** 招。經過適當的解析，作者最後

發現：若能求得單位圓內接正十二邊形的周長，即可證明圓周率比 **3.05** 大。這個解析過程，讓作者有機會對於他的解題想法「和盤托出」，而相當有益於讀者的理解。

最後，儘管本書主要處理的數學單元，是從國一到高一的範圍，然而，作者指出本書絕招也適用於高中一年級以後的數學課程學習。譬如第 **2** 招「找出週期性」，就可以用在三角函數的圖形、遞迴關係式、n 次導函數、部份積分，以及矩陣的 n 次方，等等。

總之，這是一本與中學數學學習息息相關的解題著作。作者雖然在字裡行間念念不忘升學的（日本）現實環境，然而，在實戰的解題叢林中，他總是可以分享他自己自從幼年逐步培養出來的學習經驗，其中當然也不乏數學洞察力。對於很多人的共同數學經驗或夢魘：「不記住不行」;「考試一定要得高分才可以」，他完全沒有這些束縛，在大學擔任教職的雙親給了他完全的自由環境，讓他自己摸索學習的節奏，而能隨興地享受數學學習的樂趣。因此，這是一本以解題為主的數學普及著作，不過，如果讀者對於解題興趣不大，也可以分享作者極為獨特難得的數學經驗。