數學家如何看待證明？

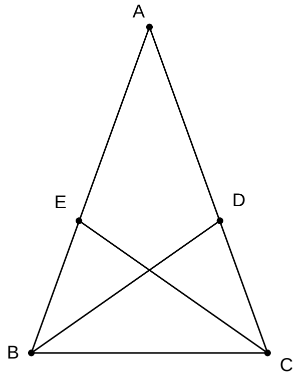
洪萬生

在《幾何學：歐幾里得及其進一步發展》(Geometry: Euclid and Beyond) 一書中，作者 Robin Hartshorne 在導論章第 1 節中，提問 "What exactly is a proof?" (p. 10)，然後，提出他自己的答案 (pp. 10-13)，頗有啓發性，值得數學教師參考。

有關證明或論證，目前在國際數學教育界的研究現況中，是個極熱門的主題，這當然解釋了何以本系即將在今年 (2009) 五月，接受委託舉辦 ICMI Study-19 國際研討會（參見本館「最新消息欄」: ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education, May 10 - 15, 2009）。

不過，數學家對於證明的「現身說法」－特別是有關後設反思的層次，也非常值得注意。在本文中，我們專門介紹 Robin Hartshorne 的觀點，希望大家參考討論。根據本系林延輯教授描述，Hartshorne 是加州大學柏克萊分校 (University of California at Berkeley) 的數學名師，除了傑出的研究成果之外，也以精彩的教學成效著稱。由此看來，Hartshorne 的觀點當然不會僅止於數學家的單純邏輯或認知的考量了。他一定同時考慮到教學法 (pedagogy) 面向，因此，更值得我們注意。

在回答上述「到底何所謂數學？」(What exactly is a proof?) 時，Hartshorne 先指出此一問題之答案取決於脈絡 (context)！首先，當我們在討論一個著名的難題如已知在三角形 ABC 中，如果 BD 與 CE 分別是∠B 與∠C 的角平分線，分別交於 AB、AC 邊於點 D、E，而且 BD＝CE，則三角形 ABC 爲等腰三角形（參考圖一）。



圖一

這一證明正如同 Hartshorne 所指出，如想利用高中幾何學的尋常方法來證明，則是令人意外地令人難以捉摸。針對這樣一個難題，只要有根據書本上的已知結果－不管這些方法來自（綜合）幾何、三角、解析幾何或甚至微積分－而得以顯示其為真，那麼，大部分人都將接受它為一個證明。

「在另一個脈絡中，一個證明可以被刻畫成為只是一個具有說服力的論述。」

這種情況通常出現在你打算向另一個同樣一般背景的人，解說一個結果，而他還無法理解這個結果。Hartshorne 的例子是求作一個圓內接正六邊形。爲了說明證明的這種面向之意義，Hartshorne 甚至還與他十七歲的兒子討論此一問題，其中當然涉及等邊三角形三個角相等與三角形內角和等於 180 度等命題。而爲了證明最後這個命題，Hartshorne 又提及它的先決條件，亦即與平行線同位角有關的命題。最後，Hartshorne 下結論說：「證明的概念作為一種具有說服力的論證之所以行得通，完全依賴了你的聽眾是誰。不過，一旦你的聽眾不合作，那麼，你的說服將可能陷入無限後退 (infinite regress) 的危險情況之中。」換句話說，如果碰到你的聽眾像三歲小孩喜歡一路問爲什麼，那麼，「恭喜了」，你可能就會忙得沒完沒了了。

如此一來，第三種以及更嚴格的證明概念，就應用在正如歐幾里得《幾何原本》這種論著的作者身上。這種證明又是什麼呢？正如同《幾何原本》一樣，我們必須先有不證自明 (self-evident) 的定義、設準 (postulate) 和公理 (common notion) 等等這些構成演繹的邏輯鍊結 (logical chain) 之起點的東西，然後，當你進行一個證明時，你必須透過一系列邏輯步驟，推演你將求證的結果，而這些步驟又只可以是那些先前已經得證的結果才行。不過，Hartshorne 也指出：即使這種證明的概念，也不是絕對的，這是因爲構成一個已知結果的可接受證明，將依賴那個結果落在這個邏輯系列中的位置而定。譬如說吧，根據 Proclus 的說法：歐幾里得發明了有關畢氏定理的全新證明，那麼，他只能將它安排在《幾何原本》第 I 冊（共有 48 個命題）結尾（命題 I. 47，命題 I. 48 爲畢氏定理之逆定理）的地方，而不能利用相似三角形的邊比例關係－這極可能是畢氏原創的方法，因爲後者直到第 IV 冊才出現。

誠然，學習第一、二種證明，應該都可望獲得相關知識內容的深一層理解 (understanding)，它們顯然是解題活動 (problem-solving) 的學習目標之一，當然值得全力以赴。不過，要是一位從數學系畢業的學生對於第三種證明概念毫無感覺，那麼，期待他（她）們對於數學知識擁有比較嚴謹的系統性、結構性理解，不是緣木求魚嗎？其實，這種數學通識固然可以得自公設數學結構如抽象代數之薰陶，不過，只要翻開《幾何原本》，精讀第 I 冊，大概就更容易達成了。古代數學經典 (mathematical classic) 之爲用，由此可見一斑。

參考文獻

Hartshorne, Robin (1997). *Geometry: Euclid and Beyond*. New York: Springer-Verlag.

Heath, Thomas L. (1956). *Thirteen Books of Euclid's Elements*. New York: Dover Publications, INC.

Joyce, David: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce.

洪萬生 (2008).〈歐幾里得如何證明畢氏定理？〉，本欄。

洪萬生 (2008).〈正 5、6、15 邊形之尺規作圖〉,〈尺規作圖〉欄。