

《平面國》的數學敘事

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

一、前言

本書英文原版 *Flatland: A Romance of Many Dimensions* 是一本數學小說，目前台灣有兩個中譯版本，先後有九章出版社的《平面國：一個多維的傳奇故事》，以及魔酒出版社的《平面國—向上，而非向北》。

九章版的《平面國》封面底介紹本書是「一本虛幻小說」，主角（也是敘事者）是生活在二維空間的平面國裡的一個「正方形」— 它也正是本版作者。事實上，本書 1884 年出版時，作者所使用的筆名就是正方形（A Square）。至於本書內容，則分成兩大部分：

第一部份：描述平面國的國情，顯然意在影射英國維多利亞女皇時代，統治階層與被統治階層之間的矛盾和鬥爭，婦女的卑微地位和苦況。

第二部份：通過主角正方形與三維世界訪客 — 圓球 — 的邂逅，解說正方形如何認識立體物體和三維空間，讀者可藉以初步了解更高維空間的知識。

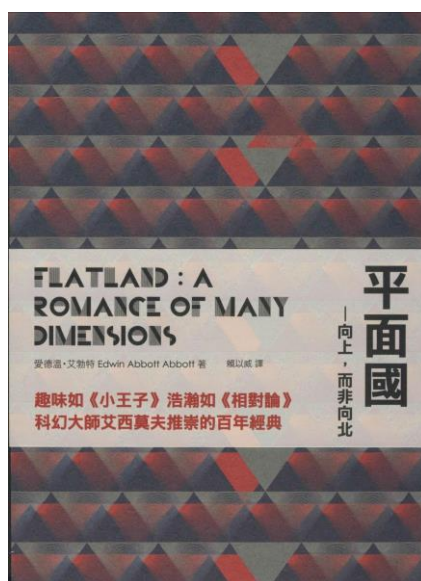
本書作者 Edwin Abbott Abbott (1838-1926) 出身劍橋大學聖約翰學院數學系，¹是英國教會牧師與中學校長，他著作頗豐，但是最著名的作品，就是這一本出版於 1884 年的小說。由於他的姓名有兩個英文字都以 A 開頭，因此，取筆名為 A Square（A 平方或正方形）。儘管這是一本諷刺（satire）體的小說，尤其充分反映了英國維多利亞時期對於女性爭取平權的焦慮，但是，從數學知識普及的觀點來看，它卻贏得英國傑出數學家西維斯特（James Joseph Sylvester）的青睞。他不只推薦給長期合作者（也是傑出數學家的）凱利（Arthur Cayley），甚至還在《牛津雜誌》（*The Oxford Magazine*）上，撰寫了一篇不具名的書評。想來他們兩人 — 數學史上最著名的搭檔雙人組 — 當時都主張四維以上的高維度空間之認知，應該成為大學生的基本素養。在十九世紀八十年代，非歐幾何已經問世有半個世紀之久，因此，「數學的延拓與抽象不應只侷限於可觀察的事物，更在於可想像的（conceivable）概念」。他們的呼籲，當然也見證了十九世紀數學的逐漸抽象化！

從數學普及書寫的觀點來看，本書提供了具體範例，說明從低維度看高維度，或者反過來，從高維度看低維度，都無法免於視野的盲點。因此，如果我們

¹ 由於 Edwin 的母親是父親的第一代堂姊妹（first cousin），因此，他的姓名中有兩個 Abbott 重疊。

透過維度的例子，來培養學生多元彈性的「觀看」能力，那麼，數學素養與現代公民素養的指標，應該就可以大幅度的重疊了。

在本文中，我主要根據魔酒版《平面國》（本文之引文取自本書），²來論述作者如何運用類比（analogy）或譬喻（metaphor），³從低維度看高維度（從二維看三維），以及從高維度看低維度（從三維看二維、一維及零維）。⁴另一方面，作者在小說情節中針對角色（character）的設定與扮演，也充分發揮了「概念自主性」（autonomy of thought）的敘事能力，⁵非常值得科普作家參考與借鏡。因此，在下一節，我要先說明此一敘事特性。



二、數學敘事：概念自主性

所謂概念自主性，我在有關《X 的奇幻之旅》的書評中，曾運用此一詞項，來刻畫作者 Steven Strogatz 對於數目的概念（number concept）特性之說明：

它們〔按：即數目〕擁有自己的生命，不受我們控制。即便它們存在於我們的意識中，一旦被定義，我們就無權干預它們的行為。它們服從一定的規律，有一定的屬性、個性以及和其他數字結合的方式，除了觀看，並嘗試了解，我們

² 至於免費網路電子版（英文版），則利用 Google 搜尋就可以找到。

³ 有關類比，不妨參考拙文〈以類推類〉。

⁴ 事實上，在這樣的視角（perspective）互換中，我們常用以形容一個人的趾高氣揚 -- 「狗眼看人低」於是有了十分具像的意義。

⁵ 譬如，在數學小說《鸚鵡定理》中，作者居耶德就將定義比喻為小說或戲劇中的角色：「就像戲劇一樣，《幾何原本》的前幾行首先敘述幾何學的十三幕偉大故事中的角色，這是歐幾里得定義的角色。」顯然它是將定義（definition）— 一個數學概念 -- 視為故事中的角色（character）！有關本書之評論，請參看拙文〈鸚鵡定理：兩千年數學之旅〉。按：《幾何原本》十三幕是指此一經典共有十三冊。

沒有什麼可以做的。

這種提法當然也近於科學哲學家卡爾·巴柏（Karl Popper）所刻畫的「世界三」（World 3），請讀者自行參照相關參考書籍。

在本書《平面國》（Flatland）的角色設定中，一切都是形狀（shape）：⁶

- 祭司或牧師是圓形，凌駕一切階級的至尊。
- 貴族是正六邊形或更多邊的規則多邊形，邊的數目越多，從屬的階級也越來越高級，直到被授予正多邊形（regular polygon）。
- 專業人士和士紳階級（是含本書敘事者—主角）正方形或正五邊形。
- 中產階級（含商人）是正三角形。
- 士兵和勞工階級是等腰三角形。
- 社會底層的下等國民也是等腰三角形，不過，他們的短邊甚至不超過八分之一吋，頂角尖銳到無法分辨是直線還是三角形。
- 女性是直線。

現在，基於「我們的」自然法則（演化論？），每一位小男孩會比他的父親都增加出一條邊，如此一來，「我們的」「社會階級將會代代提升：正方形的小孩是正五邊形，正五邊形的小孩是正六邊形，依此類推。」不過這種階級的提升，卻僅適用於正方形與正五邊形以上的階級，商人、士兵甚至工人，由於不是正三角形，稱不上是「人」，因此，這種自然法則無法套用。不過，就算是這些低階的等腰三角形們的後代，仍然有機會晉升為更高的階級。譬如，打了許多勝仗的士兵，或者勤奮又有天賦的工匠這些等腰三角形，「他們的底邊會微微地增長，兩條等邊則稍稍縮短」，於是，透過祭司的安排，這些能幹的底層族群通婚，他們的子孫便會一代比一代更接近正三角形。一旦等腰三角形雙親（Isosceles parents）生下正三角形的孩子，⁷還得通過官方認證，並且送給無子女的正三角形家庭撫養。

顯然，這一類的社會階級流動，其實相當有限，而且非常艱辛，譬如本小說主角正方形的祖父是家中最後一位等腰三角形，去世不久，才根據衛生社會局的投票結果（四比三），被拔擢為正三角形階級。他曾向正方形泣訴他的曾曾曾祖父是原先有著五十九度三十分角度的工匠，卻由於飽受長年風濕之苦，而在貴族接見時不小心抽動一下而刺穿了貴族，不幸遭受終身監禁，還因此「株連九族」：「最後整個家族的頂角都被往下調整了一度三十分，只剩下五十八度角。我們一

⁶ 本書第三、四章主題分別為「平面國的國民」與「平面國的女性」，介紹本書角色出場。

⁷ 由於女人都是直線（不分階級），因此，原作“Isosceles parents”應是筆誤或者僅指涉男人為等腰三角形。

共花了整整五代的努力來彌補這項過失，直到祖父那代，才從等腰三角形提升為正三角形。」(頁 47) 至於最低階級的女人呢，不分階級，「女人生為女人，一生為女人」，因為她們是直線，永遠無法變成正三角形。

如果社會底層份子陷入絕望，那麼，他們尖銳的頂角將會帶來非常可怕的叛亂。所幸，「當底層階級的智慧、知識、品行提升時，他們尖銳的頂角也將隨之變鈍，逐漸接近正三角的頂角角度。最危險的士兵族群，基本上就與女性一樣無知。當他們發展出心智能力，知道如何善用他們強大的穿刺武器時，幾乎同一時刻，他們的攻擊能力也將衰退。」基於此，正多邊形與圓形的貴族們，就要求醫生對那些聰明的叛亂領袖進行整形手術，讓他們進入正三角形階級，以便恢復社會秩序。

這種整形當然也攸關平面國國民的智力：因為「根據平面國的自然法則，等腰三角形的大腦從頂角開始為半度，也就是三十分的時候開始發展，之後，如果發生進化的話，每一代增加零點五度，一直到頂角成為六十度時，就能脫離社會底層，成為自由的正三角形。」(頁 48) 另一方面，由於平面國的房子都是正五邊形，因此，「要是你的商人朋友是不規則形狀的，他的背後拖著一片巨大的，對角線長達十二到十三英吋的平行四邊形，你該怎麼把這頭怪物領進家門？」(頁 63)，因此，對平面國來說，「幾何上的不規律」與「道德上的瑕疵」等價，從而如果吾人漠視不規則的多邊形之存在，將會對國家安全帶來無比的災難。

由上述的說明，可見在平面國一切都是關乎形狀，因此，要是有任何活動譬如藝術混淆了形狀，也就混淆了階級，那就會極大地威脅國家的統治。在本小說的第八、九及十章中，作者提及平面國的彩繪革命：大自然用不同數目的邊作為不同階級的依據，革命家改以顏色來區分階級。如此一來，「士兵和工人這些等腰三角形積極的態度越來越激進，他們主張自己與最高階級的多邊形之間已經沒有什麼區別了。」既然如此，「相關法令也該與時俱進，跟隨色彩的步伐，讓所有人、所有形狀在法律上同樣平等，被賦予相同的權利。」不過，這場彩繪革命最後還是被圓形主教與貴族聯手平定了。

然而，「沒有一個圓形是真正的圓形，他們只是有著無限多無限短邊的多邊形。」⁸當「多邊形的邊數增加到最後，即會趨近於圓形。當邊數多到一定程度時，好比說三百到四百，即使最精巧的觸覺辨認，也難以分辨出多邊形的角度。」可是，在平面國的上流社會是不屑藉由觸覺來辨別身份，甚至觸摸圓形會被視為最大膽、最無禮的冒犯。「這種對於觸覺辨認的禁止，早年使得圓形階級更容易

⁸ 此處譯文不全然正確，英文原文如下：“no Circle is really a Circle, but only a polygon with a very large number of very small sides.” 因此，最後一句的正確中譯應該是「他們只是有著邊數極大、每一邊都極小的〔正〕多邊形。」

地保存了他們其實是以非常多的邊構成的多邊形的秘密，他不用將真正的周長，或者說，圓周，展現在他們面前。」(頁 89)

既然圓形如此至尊，平面國的信仰教條就是：「改進你的形狀！」於是，「不管是政治、宗教或道德層面，一切的教育都是為了提升個人和社會大眾的形狀，希望最終臻於圓形的境界。」基於此一前提，本書第十二章「平面國牧師的信仰教條」就引伸出國民的醫療整形與親子教育議題。針對後一議題，作者有兩段說明，十分值得引述如下：

有時候，我的正六邊形孫子會扯出類似「因為氣候變化造成我的周長改變」這類的理由，⁹好為自己的叛逆辯護，反倒指出我不該責備他，而是必須讓他多吃點甜食來增強體魄。(頁 94)

透過持續推行「形狀決定一切」的教條……對我們平面國而言，除了尊敬最崇高的圓形外，一個人如果有了孫子，即得尊敬他的孫子，不然，就得尊敬他的兒子。「尊敬」並非指「放縱」，讓他為所欲為，而是凡事以他的利益為優先考量。(頁 95)

其中，作者對於青少年的叛逆以及父母對於孩子的溺愛，有了十分鮮明的現代迴響，真是令人心有戚戚焉。

三、數學敘事：類比或譬喻

從數學知識本身來說，本書針對維度的類比或譬喻 (analogy) 說明，是最值得注意的面向。當然，作者所指出的從高維度向低維度的透視 (perspective)，也令我們印象深刻。我們就先從後者概略說明之。

在平面國中，國民「無法透過視覺分辨各種幾何形狀的差異，除了直線以外」。比如說，立體國的國民可以看到一塊放置在桌上的一元圓形硬幣是圓形的，但是，一旦將身軀挪回桌緣，慢慢蹲下，讓眼睛與桌子邊緣越來越靠近 -- 「這動作能讓各位的視角跟平面國國民的視角更相似」，你會發現這枚硬幣越來越像一個橢圓形。「最終，當眼睛與桌面對齊時 (你彷彿成為一位平面國的國民)，這枚一元硬幣將不再是橢圓形，而是變成了此刻你眼裡所看見的，一條直線。」同理，檢視三角形、正方形等等，結果也完全一樣，在本書頁 19 就有一個正三角形的透視示意圖，請讀者參考。另外，當立體國國民 (是一個球體) 向本書主角正方形說明，何以他在「平面國上所展現的形狀，就是一個完美的圓形」時，作者也是運用透視法 (參見頁 136 附圖)。

⁹ 不要忘了作者是正方形，他的兒子為正五邊形，因此，孫子當然是正六邊形。

不過，球體為了強化他的解說，特別提醒正方形大腦所創立的一個幻想的直線國。事實上，這是本書第十三章（第二部份一開始）、第十四章的主題，正方形作夢「下降」到直線國，結果他費盡唇舌，始終無法向直線國的國王說明平面的意義。這種窘境當然也「類比」地出現在正方形無從理解球體對於三維概念的解說：

因為直線國的維度不足以展現你的全部，身為正方形的你被迫切出一個片段，只能以線段的方式呈現在國王面前。同樣的道理，你的國家只有兩個維度，不足以展現三個緯（「維」）度的我的全貌，因此我只能用自己的一部份出現在你的面前，亦即你稱之為圓形的一個平面。

你黯淡的眼神透露出你並不相信我所說的話。但請你準備好接受我即將提出的證明。因為你無法將你的視線拉離平面國，你每次只能看到我的切面越來越小。現在，我將升起，你會看見我的圓形越來越小，越來越小，直到成為一個點，然後消失。（頁 135）

儘管作者提供了圖說（頁 136），但是，他還是坦承「不知道這背後的原因是什麼」。

於是，球體決定運用譬喻（analogy）或類比，來解說他的行為與論點。他的方法是移動一個點成為線段，用線段掃描的形狀可以成為正方形。接著，他進一步向正方形解釋說：「想像平面國裡的一個正方形，以沿著平行他的方向向上移動」，那麼，這個新的形狀將是一個「立體」。如何刻畫這個立體呢？球體訴諸類比：「一個點本身就是一個點，一個點可以形成有兩個端點的線段。一條直線可以形成四個端點的正方形。」這些點的個數形成等比數列：1，2，4，下一個數當然是 8，也就是說，「一個正方形會創造出一個你不知道名字，但我們稱之為立方體的物體。他恰好有八個端點，現在你相信了嗎？」另一方面，球體也運用類比向正方形說明：一個點沒有邊（界）（boundary）（本書稱之為邊 side），一個線段有兩個邊（界點），一個正方形有四個邊（界），0，2，4 這樣的數列成等差數列，因此，類推的結果是：「你所產生的立方體會有六個『邊』，每個邊都是像你的內部一樣存在。」

當正方形對於形狀的類比概念有著深刻的理解之後，他請求球體帶領他「去到有著四個維度的國家」。這個請求相當合理，因為「我們還可以透過類推的方法，〔可以〕用來解釋更高維度空間的存在」，所以，仿照一維推到二維、二維推到三維，「以此類推，四維世界必然是存在的」：

在一維的世界裡，一個移動的點可以創造一條有兩個端點的直線，難道不是

這樣嗎？

在二維的世界裡，一條移動的直線可以創造一片有四個端點的正方形，難道不是這樣嗎？

在三維的世界裡，一片移動的正方形可以創造一塊有八個端點的立方體，難道不是這樣嗎？

而在這四個維度已然固定的世界裡，一個立體的移動 — 唉，是的，只能類推，或許事實不是這樣子的，但願我沒有推論錯誤 — 一個神聖立方體一次移動，可以創造出另一個更神聖的物體，而它將擁有十六個端點的結構？

看看這個完美的數列組成：二、四、八、十六，這不正是等比數列嗎？請容我引用你說過的話：「這正是完美的類推結果啊。」（頁 164-165）

此外，正方形還向球體指出：透過等差數列二、四、六的（向外）類推，「難道我們不能由此確定，一個神聖的立方體在四個維度的世界裡移動，可以創造出一個更神聖的物體，然後周圍由八個立方體所組成？這豈不是您所教我的『完美的類比結果』嗎？」（頁 165）既然四維世界是可以想像的，那麼，「我們可以在往上升嗎？受到神聖眷顧的四維世界，應該就在五維世界的旁邊，我們能過去看看嗎？然後，我們可以試著徹底發揮智力，敲開六維世界的大門，接下來是第七維度、第八維度……」（頁 167-168）沒想到對於正方形這麼具有膽識的類比，球體竟然要他閉嘴。

後來，球體為了證明人的無知，引導正方形「一路往下，來到最低階維度的存在 — 點之國 — 零維度的混沌。」「點之國」這個對我們而言最渺小的存在，卻是「極端的狂妄與自大」。回到平面國之後，針對先前正方形希望進入更高維度世界的要求，球體為他的拒絕表示歉意。現在，球體終於願意傳授給正方形，如何進入更高維度世界的秘密，「如何藉由移動立體創造出超立體，藉由移動超立體創造出超超立體，這一切都完全服服膺於『類比』之下」（頁 175）。

隔天一早，正方形滿懷喜悅醒來，準備將三維世界的福音傳遍平面國。他首先向正六邊形孫子傳道，因為孫子頗具數學天分，而且「還曾不經意地提及『三』的三次方的幾何意義，就曾得到球體的讚賞」。可惜，這項任務以失敗收場。

當然，正方形如何透過其他方法散佈三維世界的理論 — 本書第二十一章（亦即最後一章）的內容，譬如秘密撰寫《從平面國到想像國》的論文，以及「情緒化地在公開場合發表不該說的言論」，最後，他在參加一場於圓形長官家的會議中，「竟然鼓勵起所有聽眾脫下他們的成見，相信三維的存在。」結果，正方形被捕下獄，被判無期徒刑，在自述完成本書時，他已經被囚禁七年了。不過，在本書結尾時，正方形讓審判他的議會主席保留了一點顏面：

當我替自己辯護完後，可能是意識到有些年輕的圓形被我的誠摯的信念打動，主席問了我兩個問題：

一、我提到「向上移動，不是向北移動」，我是否能指出「向上」這個方向究竟通往何處？

二、我是否可以用畫圖或進一步的方式解釋我口中的「立方體」，而不是一味地列舉假想的邊與假想的角〔度〕？（頁 185）

這兩個問題，正方形當然都無法回答。

四、結論

在概念自主性方面，本書的相關情節之進展，都一貫地呼應角色的設定，充分證明了作者的高超敘事本事。譬如說吧，由於等腰三角形的頂點（頭部）越尖——「他們的短邊甚至不超過八分之一吋，頂角尖銳到無法分辨是直線還是三角形」，表示腦的體積容量越小，因此，只能在社會最底層階級苟活且最終遭到淘汰。平面國家庭倫理更嚴重的情況，不外乎是所有女人（不分階級）全都無腦，因為他們都是（直）線段，以致於大腦無從安置。至於圓形階級實質上並非真實的圓形，而是有很多很多邊的正多邊形，無怪乎為了隱藏此一真相，他們是不容觸摸的階級。如此一來，「幾何規律」與「道德教條」也理所當然地成為一體兩面，在一方面，一旦下層階級透過任何活動——譬如藝術彩繪——混淆了形狀，也就混淆了階級，那麼，平面國的政治局面與社會秩序，就分崩離析了。在另一方面，「改進你的形狀」也等價於「提升你的品德」，而成為平面國的主要教育目標了。

現在，在本小說中，既然所有的角色（character）都是形狀，那麼，他們在情節（plot）發展過程中的行動（action）及其所發揮的功能（function），¹⁰當然都與這些形狀的（概念）定義息息相關。這是數學小說中，情節、角色與數學知識無法切割的最佳例證之一，這些當然多虧了數學本身就是角色的緣故。

同樣地，本書的情節，譬如有關維度的引進，也直接關乎數學知識。譬如，本書主角正方形先是夢見他進入直線國（Lineland）的世界，且發現直線國國王「不可理喻」的「維度盲」（第十三、十四章）。醒來後，來自立體國的球體（Sphere）來訪，在向他徒勞地揭示立體國（Spaceland）的奧秘但無效之後（第十六章），遂引領他進入立體國，再回頭教導他從上透視平面國世界，正方形終於獲得「啟蒙」，進而掌握了有關維度的「完美的類比結果」（第十七、十八及十九章）。最後，再度在睡夢中，球體又引領他「下降」到點之國（Pointland），看到點之國國王如何地「無知到以為自己無所不知，無能到以為自己無所不能」（第二十章）。

¹⁰ 按照普羅普（V. Propp）的觀點，功能是故事中主要角色對情節所發展的有意義行動。

當然，在本小說中，有關維度概念的說明也是情節的一部份。事實上，這應該是傑出數學家西維斯特大力推薦本書的主要背景，因為本小說敘事顯然在維度概念的說明上，提供了極佳的知識普及範例。所謂維度（dimension），我們可以按下列方式說明。針對一維的情況，取 2 條等長的繩子，把兩端對齊，則尺度大小（scale）當然是 2 倍。針對二維的情況，若取一個正方形紙片，則需要 4 個拷貝（copy）才能加倍這個正方形的尺度大小。針對三維的情況，若給一個正立方體的起司，則需要 8 個拷貝才能加倍其尺度大小。依此類推，若給定的是一個「四維的起司」，則需要 16 個拷貝。這種四維的起司在數學上稱之為「超立體」

（hypercube），是三維正立方體的延拓，如果我們要將其「體積」加倍，就必需要有 2^4 個拷貝才是。顯然，一、二、三、四維就依序對應到 $2^1 = 2$ 、 $2^2 = 4$ 、 $2^3 = 8$ 、 $2^4 = 16$ 個拷貝中的指數 1、2、3、4。

在上述這個說明中， $2^1 = 2$ 、 $2^2 = 4$ 、 $2^3 = 8$ 、 $2^4 = 16$ 個拷貝數，恰好等於上引圖形如線段、正方形、正立方體「移動」時，所製造出來的端點（或頂點 vertex）數。不過，由於作者在本書中，極力主張要「向上，而非向北」移動，因此，他對於通過他的「移動」類比所引進的高維度概念，看起來也比較自然且一貫。只不過，他可能未曾想過他的進路，或許對於我們如何引進碎形維度（fractal dimension），¹¹並沒有太大的助益了。這個提法顯然年代誤置，我們沒有苛求的意思，只是想藉此指出：在認知上，不同的進路（approach）會引出或連結到各自相關的效益或可能性，因此，每一種進路都值得我們學習與欣賞。

總之，本文僅就本小說敘事（narrative）與數學知識的連結，進行一個初步的考察，其主旨在於指出：如將本書視為數學小說、並將其視為數學普及閱讀的一個重要工具，那麼，我們如何可以找到欣賞它的切入點。至於本書作者創作的維多利亞時代社會文化脈絡，數學家兼科普作家史都華（Ian Stewart）在他的註解版序文中，曾指出 Edwin Abbott Abbott 與十九世紀英國文化、數學界名流如雪萊夫婦、拜倫爵士、艾達·拉夫勒斯（Ada Lovelace）、巴貝吉（Charles Babbage）、布爾夫婦（George and Mary Boole）等人的密切關連。¹²還有，平面國民的溝通（或辨認彼此）的三種方法：聽覺（Art of Hearing）、觸覺（Art of Feeling）與視覺（Art of Sight of Recognition）（第五、六章），恰好也用以區別階級，這種比喻顯然具有極深刻的社會批判意涵，但與本文題旨不太相關，限於篇幅，請讀者容許我們從略了。

¹¹ 按照我們的說法，給定一個圖形，如果加倍它的尺度大小需要 d 個拷貝，亦即 $c = 2^d$ 個拷貝，在兩邊取對數之後，得 $\log c = d \log 2$ 或 $d = \log c / \log 2$ ，這個 d 就是給定圖形的維度。現在，假定一個已知物體，若它的 3 個拷貝黏在一起，尺度大小會加倍，那麼，它的維度就等於 $d = \log 3 / \log 2 \approx 1.44427$ ，這就是碎形維度的一個定義。

¹² 布爾夫婦的女兒 Alicia Boole Stott (1860-1940) 被認為是四維幾何學的權威。

參考文獻

- 正方形 (A Square; Edwin Abbott Abbott) (2012). 《平面國：一個多維的傳奇故事》 (*Flatland: A Romance of Many Dimensions*) (陳鳳潔翻譯)，台北市：九章出版社。
- 林芳玫、洪萬生 (2009). 〈數學小說初探：以結構主義敘事分析比較兩本小說〉，《科學教育學刊》17(6): 533-551。
- 林芳玫、洪萬生 (2009). 〈數學與敘事在教育上的應用：以通識教育和 HPM 為例〉，《HPM 通訊》12(11): 1-11。
- 洪萬生，〈鸚鵡定理：兩千年數學之旅〉，載「台灣數學博物館·數學小說專欄」。
- 洪萬生 (2014). 〈以類推類〉，收入洪萬生等，《數說新語》(台北市：開學文化出版社，2014)，頁 207-214。
- 洪萬生 (2014). 〈碎形維度怎麼算？〉，收入洪萬生等，《數說新語》(台北：開學文化出版社)，頁 215-224。
- 愛德溫·艾伯特 (Edwin Abbott Abbott) (2014). 《平面國 — 向上，而非向北》 (*Flatland: A Romance of Many Dimensions*) (賴以威翻譯)，台北市：魔酒出版社。
- Abbott, Edwin A. with Thomas Banchoff and the Filmmakers of *Flatland* (2007). *Flatland: The Movie Edition*. Princeton and Oxford: Princeton University Press.
- Hornig, Wann-Sheng (2012). “Narrative, Discourse and Mathematics Education: An Historian’s Perspective”, plenary speech presented to PME36, July 18, Wesley Girl High School, Taipei.
- O’Connor, J. J and E. F. Robertson. “Edwin Abbott Abbott”, <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Abbott.html>. 2014/7/27 參閱。
- Stewart, Ian (2012). “Preface to *The Annotated Flatland: A Romance of Many Dimensions*”, *Science Friday* 網頁，2014/7/27 參閱。
- 附記：本文原刊載於教育部高中數學學科中心高中數學電子報第 89 期，轉載於此時略有修訂 (2014/8/26)。