

推薦 Steven Strogatz 的《 x 的奇幻旅程》

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

書名： x 的奇幻旅程：從零到無限的數學（The Joy of x : A guided tour of math, from one to infinity）

作者：Steven Strogatz（史蒂芬·斯托蓋茲）

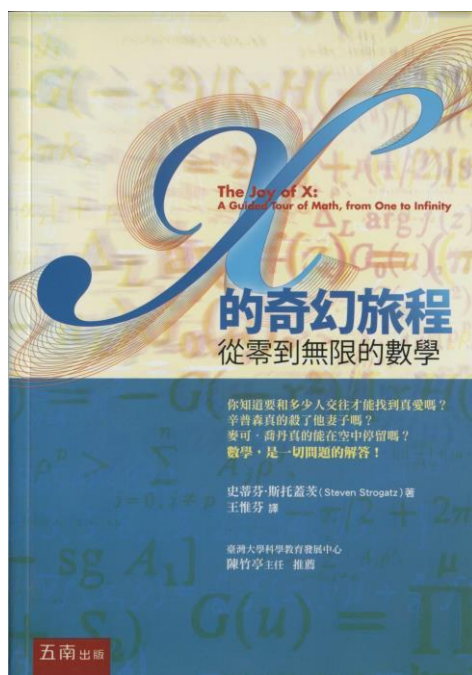
譯者：王惟芬

出版社：五南出版社

出版日期：2014

出版資料：平裝本，324 頁

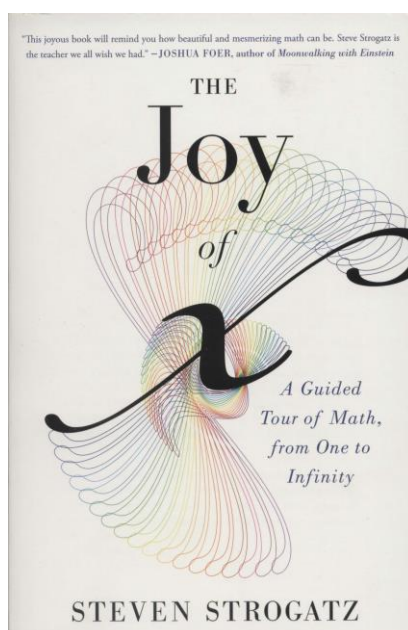
ISBN: 978-957-11-7600-0



一、前言

本書作者史蒂芬·斯托蓋茲或史蒂芬·史特格茲（Steven Strogatz）是康乃爾大學講座教授，是一位十分傑出的應用數學家。他也著有《學微積分，也學人生》，是藉由他對高中數學老師的追憶（含教學點滴與畢業後的通信），而寫成的一本半自傳體的數學普及書籍。我曾撰寫書評一篇〈數學與敘事的完美結合：鄭重推薦《學微積分，也學人生》〉（載「台灣數學博物館·科普特區·深度書評」），其中，我特別推崇該書「是一本數學與敘事（narrative）完美結合的一本數學普及書籍。作者既寫數學，也寫人生，又綜合地（synthetically）與分析地

(analytically) 寫下他自己的數學人生。擁有豐富數學經驗的人，既領悟了數學創造或發明的美，又有能力將這種美的感受分享給他的閱聽人。這就是史蒂芬·史特格茲書寫本書的原初動機，他對數學經驗的詩意思象，為我們做了最深情的告白」，讀者可以自行參閱。



針對本書的英文版，我曾撰寫〈推薦 Steven Strogatz 的 *The Joy of x: A Guided Tool of Math, from One to Infinity*〉(載「台灣數學博物館·科普特區·深度書評」)，對他的科普書寫表示高度肯定。現在針對中譯本，我再度推薦本書時，原來的推崇還是不變，因此，大部分的文字仍然沿用，尚請讀者包涵。不過，由於中譯本有一些值得商榷之處，所以，我將會補進一些必要的評論。

二、本書內容簡介

本書共收集 30 篇普及數學文章，包括有 16 篇根據作者自己為《紐約時報》開闢專欄 *The Elements of Mathematics* 所撰寫的版本之改寫。內容包羅萬象，但總歸不離數學知識的有趣與有用。不過，為了方便讀者閱讀，作者還是依循數學傳統課程的方式，將這 30 篇在知識內涵上彼此獨立的文章，歸類為六個部分。茲將作者在各個部份及其所安排的文章主題引述如下：

- 數目 (numbers): ¹第一章〈數字〉；第二章〈一堆石頭〉；第三章〈我敵人的敵人〉；第四章〈換算〉；第五章〈讓人抓狂的除法〉；第六章〈位置，位置，位置〉。
- 關係 (relationships): 第七章〈X 的樂趣〉；第八章〈尋找你的根〉；第九章〈滿出來的浴缸〉；第十章〈二次方程式〉；第十一章〈強大的工具〉。

¹ 中譯版譯為「數字」。

- 形狀 (shapes): 第十二章〈方塊舞〉; 第十三章〈無中生有〉; 第十四章〈圓錐的陰謀〉; 第十五章〈必要條件〉; 第十六章〈極限〉。
- 變化 (change): ²第十七章〈改變我們所能相信的〉; 第十八章〈切片與切塊〉; 第十九章〈都是為了 e 〉; 第二十章〈你愛我, 你不愛我〉; 第二十一章〈進入光的世界〉。
- 數據 (data): ³第二十二章〈新常態〉; 第二十三章〈機率有多大〉; 第二十四章〈解開網路〉。
- 研究前沿 (frontiers): ⁴第二十五章〈最孤單的數字〉; 第二十六章〈群體思考〉; 第二十七章〈扭轉與叫喊〉; 第二十八章〈全球思維〉; 第二十九章〈分析這個!〉; 第三十章〈希爾伯特大飯店〉。

由於作者利用「導覽的數學旅程」(見本書副標題)來比喻本書內容,因此,他的首章主題是數目 1,⁵至於終章(第三十一章)則是利用希爾伯特旅館(Hilbert Hotel)的比喻,來討論如何區分「無限」(名詞)的等級。現在,就讓我們簡要地介紹各章的內容。

首先是第一部份的六章。第一章介紹數目及其數數,作者特別提及它的「概念自主性」(autonomy of thought)。他認為數目的這種雙重特性 — 一部份超然在外,一部份極度實際地貼近日常生活 — 這或許是它們最有用的地方,想必這正是物理學家維格納(Eugene Wigner)據以提出數學在自然科學中的「不合理有效性」(unreasonable effectiveness of mathematics)之理由吧。第二章的主題是源自畢氏學派的擬形數(figurative number),強調它好玩的面向,也因此作者引述《博士熱愛的算式》,因為該小說中的一個重要插曲,就是博士敦促男孩根號一定要找到一個別出心裁的方法,來求 $1+2+3+\dots+10$ 。

第三章主要說明為何「負負得正」,作者的標題「我敵人的敵人」(The Enemy of My Enemy)頗有創意,他運用了有趣的比喻,而且,還說明這在政治結盟上的意義。第四章主題是「換算」,英文原名是 commuting,在數學上是指「交換(律)」的意思。作者特別針對乘法的交換律,提出一些有趣的例證,說明「將乘法視覺化,就會變得比較直觀」。第五章主題是小數,儘管作者以除法來強調。作者在本章中,從小數的類別引進有理數與無理數,並提及他在小學時的一段學習插曲:他不相信老師所指出的 $0.999\dots=1$ 。作者在本章第一段預示了這些相關敘事的趣味:「算術其實是由一條敘事線貫穿的,但很多人在一長串的除法和分母的陰霾下,對它視而不見。現在我們要講的故事,是關於追尋附加功能越來越多的數字。」第六章主題是表徵數目的位值系統,作者從創立康乃爾大學的康乃

² 中譯版譯為「改變」。

³ 中譯版譯為「資料」。

⁴ 中譯版譯為「邊境」。

⁵ 因此,中譯版的副標題「從零到無限的數學」宜改為「從一到無限的數學」才是。

爾 (Ezra Cornell) (木匠出身) 之生卒年 MDCCCVII-MDCCCLXXIV 談起。

本書第七章到第十六章各分屬於第二部份的「關係」與「形狀」，正如作者所指出：「現在該從小學算術進入中學數學了。在接下來的十章，我們重溫代數、幾何與三角。」第七章介紹方程式的未知數 x ，本章標題也被採用為本書標題。第八章主題是虛數，來自負數的平方根。作者也特別介紹他的康乃爾同事 John Hubbard 所發展出來的複數平面上的牛頓法，以及其複雜動力學 (complex dynamics) 及碎形。第九章主題是應用問題，作者所舉的問題，也是他年幼時被叔叔考倒的問題：「如果冷水龍頭注滿浴缸需要半小時，而熱水龍頭注滿則需要一小時，那麼，兩個水龍頭一起打開，需要多久可將浴缸注滿？」作者利用這一類問題，說明吾人在解題時，掌握數學建模 (mathematical modeling) 的重要性。第十章主題二方程式解法，作者利用第九世紀阿拉伯數學家阿爾·花拉子密 (al-Khwarizmi) 的幾何進路「配方」(配成完全平方) (completing the square)。第十一章主題是函數，作者以日常生活可見的例子，說明函數的二元面向：既是工具 (tool) 也是建材 (building block)。此外，作者還在指數函數的快速增長下，特別提及一位美國高中女生將紙對折十二次的世界記錄。而一旦提及指數函數，那麼，對數函數也理所當然如影隨形，因此，作者也說明的對數函數的應用。

從第十二章到十六章，是有關幾何學的主題內容。第十二章主題是畢氏定理證明，作者利用了正方形的割補拼湊，說明相關的證法「不僅具有說服力還有啟發性」，因此，標題才會取名為「方塊舞」(suarfe dancing)。第十三章主題是幾何證明，作者當然從歐幾里得《幾何原本》及其影響 (特別是美國開國元勳) 談起，至於本章標題「無中生有」，顯然意在強調發明證明所需要的想像力。第十四章主題是圓錐曲線，作者從它們的聚焦性質提問：它們背後是否有更深一層東西 (譬如造物者的「陰謀」) 在運作？因而呼應了本章標題「圓錐的陰謀」。在第十五章，作者主要說明正弦波在大自然運作中的必要性 (*sine qua non*)。至於第十六章的「取其極限」，顯然是為了幫助讀者平順地過渡到第三部份的「變化」，作者使用的例子，是圓面積公式的直觀證明。

第十七、十八章主題依序是微分與積分。前者以 NBA 球星麥克·喬登 (Micael Jordan) 的雷霆灌籃為例，說明微分法在求極大、極小值的重要性。至於後者則是以阿基米德發現並證明球體積公式為例，說明如何以兩個正交的相同圓柱體之交集，如何成為阿基米德的解題關鍵。可惜，作者不知道此一立體圖形也曾被中國第三世紀數學家劉徽所發現而造出 — 劉徽稱之為「牟合方蓋形」，並成為後來的第五世紀祖沖之 (429-500 AD) 發現並證明球體積公式的關鍵。在第十八章最後，作者也特別強調微積分基本定理的重要性。

第十九章主題是 (歐拉數) e ，作者除了利息問題之外，特別強調「在確定

終身伴侶之前，應該要和多少人交往？你的奶奶知道，數字 e 也知道」，針對 e 的這個提法，想必《紐約時報》的讀者都非常受用才是。在第二十章中，作者指出微分方程式不僅能說明行星運動，也現身說法，說明自己曾經因為沒有把握的夏日戀情，「才有以微分方程式來描述感情生活的愚蠢想法」。第二十一章主題是向量微積分，當然這與馬克斯威爾的電磁方程式息息相關，作者最後評價馬克斯威爾：「確定光和電磁波的關連後，馬克斯威爾統一了自古以來看似無關的三大現象：電、磁與光。雖然法拉第和安培這些人之前曾以實驗找出這個難題的幾個關鍵，但一直要到馬克斯威爾，才透過數學工具，將它們連貫起來。」

第五部份主題是「資料」(data)，有三章討論機率與統計的重要性。在第二十二章中，作者以「新常態」(new normal) 為題，舉例說明長尾分佈比常態分佈更能說明一些社會經濟現象。第二十三章主題是條件機率，作者現身說法，以學生的答題進路，說明相關機率迷思何以存在。在第二十四章，作者則企圖利用線性代數知識，說明 Google 的網路搜尋奧秘。

第六部份(本書最後部份)有六章，它們所涉及的研究前沿主題依序是數論(孿生質數)、群論(床墊數學)、拓樸學(莫比烏斯帶 Mobius strip)、微分幾何(最短路徑)、分析學(交錯調和級數)，以及有關無限(集合)的研究。平心而論，作者在最後一章有關「希爾伯特大飯店」之說明，只是為了呼應本書第一章的「魚、魚、魚、魚、魚、魚的數數問題」— 回顧第一章標題「從魚到無限大」，我們的數學奇幻旅程終於找到了終點！

三、評論

通常應用數學家在從事數學普及書寫時，大都比較側重數學的有用，不過，如果考慮到一般讀者的閱讀門檻，從最淺近的面向切入，適時地強調數學的知識獵奇趣味，也是多數作者經常採用的一種「下手」策略。本書作者正是如此，我們就以他所寫的第三章為例，提供一個簡要的說明。

本書第三章有關「負負得正」的說明，作者一開始說明負數乘正數的意義，比如說 $(-1) \times 3$ ，仿照 $1 \times 3 = 1 + 1 + 1 = 3$ ，我們可以將 $(-1) \times 3$ 視為 $(-1) + (-1) + (-1)$ 而得到 -3 。如此一來，我們考察下列諸式：

$$(-1) \times 3 = -3$$

$$(-1) \times 2 = -2$$

$$(-1) \times 1 = -1$$

$$(-1) \times 0 = 0$$

$$(-1) \times (-1) = ?$$

現在，如果我們注意到各個等式右邊數出現的「模式」(pattern)，就可以發現每一步都是上一數加 1 而得，因此， $(-1) \times (-1) = 1$ 理應成立才是。當然，要是數學教師使用這一招用到教學現場上，而學生並不買帳時，那就另請高明了。

從選題與敘述策略的觀點來看，上述這篇有關「負負得正」之說明及其「我敵人的敵人」的比喻，的確很可以打動一般讀者，尤其是那些上至天文，下至地理，旁及音樂藝術無所不談的博雅人士，這更是對極了他們的胃口，因為他們天不怕地不怕，但就是怕數學！⁶顯然基於這些讀者群的考量，作者在本書中援引許多流行文化的元素。譬如說吧，

- 第一章有關「數數」之說明時，作者就引述了《芝麻街》的教學錄影帶〈和我一起數數〉(123 Count with Me)。
- 第二章主題是「擬形數」(figurative number)，作者在介紹高斯幼年發現等差級數求和公式時，引述了小川洋子的數學小說經典《博士熱愛的算式》英文版 *The Housekeeper and the Professor* 的相關插曲。
- 第五章主題是除法與分數。作者引述了真實故事改編的電影《我的左腳》，亦即曾在網路上流傳的一段有關 0.002 美元與 0.002 美分的經典對話。
- 第十一章主題是「函數」(英文標題是“Power Tools”)，作者則以 1980 年代的電視影集《雙面嬌娃》(*Moonlighting*) 的一段有關「對數」的對話作為引子。
- 第十七章介紹「導數」時，作者引 NBA 球星喬登 (Michael Jordan) 的雷霆灌籃為例，說明他的跳躍曲線的斜率之變化。
- 第二十五章介紹「最孤單的數字」時，作者則引述數學小說《質數的孤獨》中的片段。

還有，

- 在第二十九章介紹「無窮級數求和」時，作者也提及 HBO 電視影集《黑道家族》(*The Sopranos*) 的一段插曲，其中黑手黨老大東尼一直懷疑他媽媽要找人置他於死地，而求助於心理分析師，呼應了該篇的英文標題：“Analyze This!” (分析這個)。

不過，我覺得本書最精彩的地方，乃是作者的「就近取譬」與「現身說法」。在本書第九章中，作者提及文字題 (word problem) 的重要性。他一開始就回溯他自己在大約九或十歲時，他叔叔給了一個文字題：如果冷水龍頭注滿浴缸需要

⁶ 在本書〈前言〉中，作者特別提到：「我有個朋友，對科學懷有莫大的興趣，但他其實是個藝術家。每當我們聚在一起，他總是會聊一些心理學或量子力學的最新進展。但只要一談到數學，他總是一頭霧水，搞不清楚狀況，這令他非常難過。奇怪的數學符號讓他產生疏離感。他說，他甚至連這些符號要怎麼唸都不知道。」

半小時，而熱水龍頭注滿則需要一小時，那麼，兩個水龍頭一起打開，需要多久可將浴缸注滿？當年，作者所猜測的答案是 45 分鐘，結果叔叔搖搖頭且慧黠地笑了，接著，向他說明如何正確地解決此一問題。這個問題及其正確解法給了看來並非數學早慧的作者，極大的震撼教育，以致於他後來不斷地回想此一文字題及其解法的重要意義。他甚至還與太太討論，何以他會想出 45 分鐘這個錯誤的答案。

作者利用這個「自曝其短」的案例，來向我們說明：任何一位傑出的（應用）數學家，都可能在早歲時並未顯露驚人的數學才華，然而，憑藉著後天的努力與完善的教育與學術環境，卻仍然可以成就不凡的學術事業。事實上，作者也曾在《學微積分，也學人生》中，提及他剛進入普林斯頓數學系時，被大一的線性代數課程之高度形式化與抽象化，嚇到差點轉物理系。這種挫折對於他目前的普及書寫，想必帶來了深刻的啟發才是。

再回到上述這個文字題上。它是我們所熟悉的小學算術之工程問題。在我們的教育環境中，一旦學會歸類此一文字題（或應用問題）的屬性，便能利用相關的解法，迅速求得正確的答案。不過，作者卻藉此說明文字題可以引導我們體會「數學建模」的意義，這在以套用公式求解為尚的速食教育環境中，是非常不可思議的一件事。

總之，本書一如作者的前作《學微積分，也學人生》，也值得高度推薦。作者所設定的讀者對象，除了數學家同行、數學系學生以及中小學師生之外，應該也期待博雅君子才是，畢竟這些文章都是為《紐約時報》的讀者而寫的。事實上，作者在第一章對數目的概念自主性（autonomy of thought）之說明，就足以顯示他本人的博雅素養：「它們擁有自己的生命，不受我們控制。即便它們存在於我們的意識中，一旦被定義，我們就無權干預它們的行為。它們服從一定的規律，有一定的屬性、個性以及和其他數字結合的方式，除了觀看，並嘗試了解，我們沒有什麼可以做的。」值得科普作家效法。

最後，在中譯本中，譯者提供了不少譯注，都有助於讀者深入理解相關內容。不過，她對於內容的補充說明難免掛一漏萬。譬如說吧，有關孿生質數的研究（見第二十五章），2013 年由華人數學家張益唐所締造的驚奇，是近百年來最偉大的貢獻，就很值得提及。⁷

四、中譯商榷與資訊補充

- 頁 3-5：「數字」一詞若改為「數目」則將更切題。前者的精確意義等同於英

⁷ 參考洪萬生，〈孿生質數：質數不再孤獨？〉，收入洪萬生等，《數說新語》（台北：開學文化出版社，2014），頁 225-231。

文的 **number word** (數目字)，至為後者，當然就是「數目」了。其實，這兩者之間的區別在於後者指涉一個概念，而前者則被當作「文字」使用。論及此一區別，我們還可以再加上「數碼」(numeral) 一詞。

- 頁 7：保羅·洛克哈特的《一個數學家的輓歌》(*A Mathematician's Lament*) 中譯本之書名為《一個數學家的嘆息》。
- 頁 11：小川洋子的小說《博士熱愛的算式》英譯名為 *The Housekeeper and the Professor*。中譯名應該恢復原名(日文名近於中文)。還有，小說中的男孩被博士暱稱為「根號」，中譯本將英文版的 **root** 譯為「路特」，也值得讀者注意。
- 頁 23：「以 3 為底」是指將一個自然數從十進位改成三進位的表徵 (representation) 而言，而應該不是譯注所說的「對數換底」，因為小學二年級不可能學到對數。因此，本章題名應譯為「交換律」比較恰當！
- 頁 47：中譯文「當你在代數課上解析 (factored) 或乘以多項式時，你便是在使用恆等式。」有誤，英文的 “factored” 應該翻譯成「分解 (因式)」。
- 頁 69：「『恢復』(阿拉伯語為 al-jabr)」(Arabic for “restoration”) 之中譯建議改成「阿拉伯語所謂『復原』的意思」，因為 al-jabr 是拉丁文。又，花拉子密 (Al-Khwarizmi) 的名字我們在中譯時，習慣加上「阿爾」而成為「阿爾·花拉子密」。
- 頁 73：「填滿矩形」譯自 **completing the square**，正確中譯應為「配方」(配成完全平方)，字面上的意思是：配成一個正方形。
- 頁 114：「圓錐截面 (conic sections)」通譯為「圓錐截線」或圓錐曲線，這些曲線都是由圓錐面所截出來的，是一維的圖形。
- 頁 159-160：「差分方程式」有誤，應改為「微分方程式」(differential equation)。
- 頁 186：「貝葉斯定理」之中譯名通常簡稱為「貝氏定理」，此外，「等效方法」(equivalent method) 之中譯，我們國內數學家偏愛「等價方法」。
- 頁 220：「拓撲學」(topology) 應該改為「拓樸學」，後者是台灣數學界的慣稱。同樣地，在第 311 頁中，也必須一律將「拓撲」改成「拓樸」。
- 頁 262：同頁 11，小川洋子的小說《博士熱愛的算式》英譯名為 *The Housekeeper and the Professor*。又，本頁也引述 Mario Livio 的 *Is God a Mathematician?* 該書之中譯本為《上帝是數學家嗎？》。
- 頁 274：「將 x 功能投射到 x^2 的函數」譯自原文 “the function that maps x into x^2 ”，此中譯多了贅詞「功能」，顯然是將 **function** 譯成「功能」所致。其實，作者在此之解說有一點畫蛇添足，只需將此一函數表達成 $f(x) = x^2$ 即可。可是，如此一來作者的博雅藝術家朋友，恐怕就唸不來此一函數符號了。
- 頁 284：[注 59]中的參考文獻之中譯本為《毛起來說三角》(*Trigonometric Delights*)。
- 頁 307：泰瑞·陶 (Terry Tao) 是澳洲華人，曾榮獲費爾茲 (Fields) 等大獎，被譽為數學界的莫札特，他的中文名字叫做「陶哲軒」。
- 頁 308：所謂「克萊因四組」(Klein 4-group)，是指德國偉大數學家克萊因 (Felix

Klein) 所提出來的四元素群 (一個群有四個元素), 此一中譯不像數學名詞。又, 「簡單群體」(**simple groups**) 之中譯也難以索解, 一般中譯為「單群」。

2014-06-27 後記: 本文原刊教育部《高中數學學科中心高中數學電子報》第 87 期, 轉載於此的版本略有修飾, 請讀者諒察。