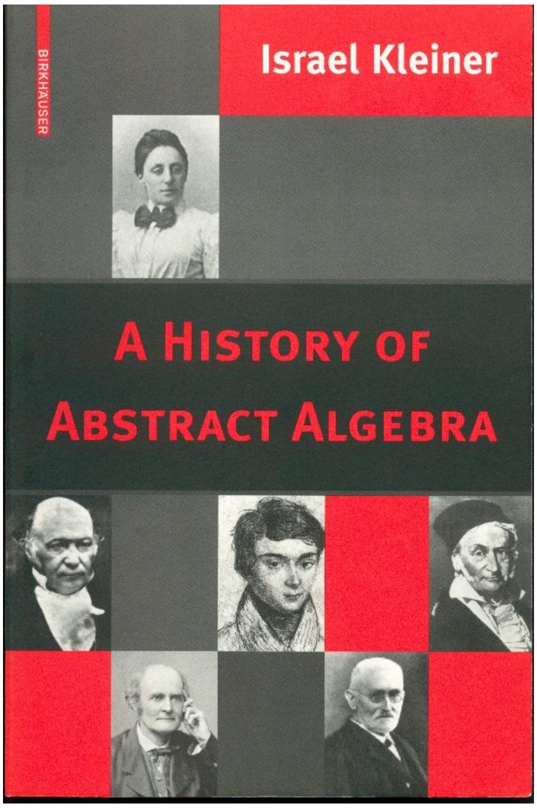
推薦 Israel Kleiner 的 *A History of Abstract Algebra*

洪萬生

書名：**A History of Abstract Algebra**
作者：**Israel Kleiner**
出版：**Boston: Birkhauser**
出版年份：**2007**
出版資料：平裝本共 **xiii+168 pp**
國際書碼：**ISBN 978-0-8176-4684-4**



相對於中小學層次來說，**HPM** 的研究論述較少提及大學層次的數學，**Kleiner** 這本書算是蠻罕見的例外。數學史家 **Harold Edwards** 固然有多本著作如 ***Riemann Zeta Function***、***Fermat Last Theorem*** 以及 ***Galois theory*** 等，都論及數學知識起源，不過，**HPM** 的關懷並未十分顯豁。在本書中，**Kleiner** 除了群、環、體，以及線性代數的歷史之說明外，還提供了專章（第 **7** 章），說明他如何藉由數學史啟發，在加拿大約克（**York**）大學數學與統計系，設計一門在職數學教師碩士班的抽象代數課程。

在這個有關抽象代數的 **HPM** 課程中，**Kleiner** 提出五個問題，依序是：

問題 I：為何 (-1)(-1)=1?

問題 II： $x^2+2=y^3$ **的整數解為何？**

問題 III：我們可以只用尺規三等分 60° **角嗎？**

問題 IV：我們可用根式解 $x^5-6x+3=0$ **嗎？**

問題 V：「爸爸，你可以乘三數組（triples）嗎？」

問題 **I** 處理算術與抽象代數之間的關係，也是國中數學教學現場必定遭遇的認知困擾之根源。**Kleiner** 利用此一「貌似天真的問題」，而引出一大堆的想法！譬如針對此一問題，他就列出了七項「回饋」（**payoffs**），譬如，如何證明像**(-1)(-1)=1** 這樣的定律，將引導到公設的問題上。問題 **II** 是有關刁番圖方程式，直到最近才解決。它處理數論與抽象代數之間的關係，引發唯一分解域（**unique factorization domain**）及歐氏域（**Euclidean domain**）的概念。問題 **III** 是尺規作圖題，**Kleiner** 引進體論時，將它視為主要的方法。在本節結束時，**Kleiner** 特別說明歷史（**history**）**vs.** 起源（**genesis**）之對比。他認為萬卓（**Wantzel**）在 **1837** 年解決三等分任意角為不可能時，儘管他的進路在精神上，類似我們現在的方法，但是，他既不使用體（**field**），也不使用向量空間，我們卻使用了兩者。因此，我們的進路是起源式的（**genetic**），而非嚴格的歷史進路。問題 **IV** 處理古典代數 **vs.**抽象代數之過渡，作者利用這樣的例子，提出相關的群與體之對應關係，並溯及拉格蘭吉求解六次方程式的功敗垂成。問題 **V** 是由漢彌頓的兒子向爸爸所提出：在多年的奮鬥之後，是否已經找到三維空間的複數結構？這個問題包含了算術/古典代數與抽象代數之關係，引發了一種新代數與可除環（**division ring**）之概念。

至於這五個問題在課程中如何使用，**Kleiner** 在本章末還提供了他的備註，其中他指出：第一個和最後一個，甚至還有第二個，在抽象代數課程中都是非典型的（**atypical**）問題，然而，它們在教學上，卻極具啟蒙意義（**pedagogically enlightening**），而且還充滿了代數理念。「在歷史上，它們標誌著從古典到近世（抽象）代數的過渡。」不過，在教材的選擇方面，他非常謹慎地以二手文獻的研讀為主，因為課程已經十足挑戰，而且第二手文獻已經可以達成教學目標了。

由於這些選修在職班的教師，應該主要任教於中小學，因此，**Kleiner** 當然更有必要說明何以中學代數與大學代數之內容，竟然有著這麼大的差異。這可以解釋何以在第 **1** 章，作者要從古典代數談起。在本章中，作者討論二、三、四次方程式解法，以及代數基本定理和符號法則之歷史意義。他在序言中提及：「**抽象代數源自較早的一個古典傳統，這個傳統值得有其自身的一個導論章。**」這是因為如他指出：「**在十九世紀以前，『代數』意指多項方程式求解之研究。而在二十世紀，它意指抽象公設系統如群、環及體之研究。從『古典』到『現代』的過渡出現在十九世紀。抽象代數主要因為數學家無法利用古典方法，求解古典的（十**

九世紀之前的）古典問題。這些問題來自數論、幾何、分析、多項式方程式的可解性，以及各種數系性質的探討。」

本書第 **2-4** 章依序討論群、環、體之歷史，我們在此略而不談。有關第 **5** 章的主題線性代數的歷史，則由於與高中數學頗有關連，我們想在此稍加介紹。根據 **Kleiner** 的說明，線性代數學的初等概念有線性方程組、矩陣、行列式、線性變換、線性獨立、維度、雙線性式、二次式，以及向量空間。到 **1880** 年時，線性代數的基本結果已經大致就緒，不過，它們尚未納入一個一般性理論之中。尤其是這樣的理論所需要的架構 － 向量空間，還是看不到影子。**1880** 年，皮亞諾（**Peano**）才引進這個概念，但也完全被忽視。直到二十世紀早期，向量空間才成為一個成熟理論的必要成分。「**因此，這個主題的歷史發展，顛倒了它的邏輯順序。**」在本章最後，**Kleiner** 總結了向量空間的起源故事，強調它出自三個相異的脈絡：幾何、分析及代數。而在 **1930** 年，**van der Waerden** 出版他的經典作品 ***Modern Algebra*** 時，已經將「線性代數」列為專章，不僅名稱首見，而且其意義也完全與我們今日使用相同。

第 **6** 章主題是論述愛咪 • 涅特對抽象代數的創建之功。由於她的不可替代貢獻，她被數學家尊稱為「抽象代數之父」,「以及抽象代數之母」。**1976** 年，數學家 **Garrett Birkhoff** 總結 **1936-1950** 年間的抽象代數發展，指出：要是涅特有機會參加 **1950** 年的國際數學家大會，她一定會感到十分驕傲。因為她的代數概念在當代數學活動中，已經變得舉足輕重。而且從此以後，她的概念也繼續啟發代數學家。

愛咪 • 涅特誠然是二十世紀最偉大的數學家之一。除了第 **6** 章之外，**Kleiner** 特別安排第 **8** 章，為她提供一個略傳，讀者如能將這兩個部份之內容交叉參照閱讀，一定可以獲得有更深刻的感受。在本章中，除了涅特之外，還有其他七位數學家的傳記，依序是凱利（**Arthur Cayley, 1821-1895**）、戴德金（**Richard Dedekind, 1831-1916**）、伽羅瓦（**Evariste Galois, 1811-1832**）、高斯（**Carl Friederich Gauss, 1777-1855**），以及漢彌頓（**William Rowan Hamilton, 1805-1865**）。

至於本書目次，也引述如下以供參考：

Abstract Algebra）

7. **由歷史所激發的一門抽象代數課程（A Course in Abstract Algebra Inspired by History）**
8. **精選的數學家之傳記（Biographies of Selected Mathematicians）**

總之，本書雖然非常精簡，但是，**Kleiner** 寫來平易近人，而且不時散發著數學史的洞察力，讀起來相當受用。我以前在台灣師大數學系任教時，為了說明虛數誕生的故事，經常帶著學生一起研讀他的論文，**“Thinking the unthinkable: The story of complex numbers (with a moral)” (*Mathematics Teacher* 81(1988): 583-592)**，受益良多，因而對他留下十分深刻的印象。現在，本書有專章訴求 **HPM**，更是不容錯過的現身說法。因此，我要大力推薦本書，尤其是曾經對於抽象代數的學習特別有心得的教師，它更是一個絕佳的 **HPM** 切入點。