

導讀《數字人—斐波那契的兔子》

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

英文原版：Keith Devlin (2011). *The Man of Numbers: Fibonacci's Arithmetic Revolution*

中譯者：洪萬生、洪贊天、蘇惠玉

出版社：五南出版社

出版年：2013

關鍵詞：斐波那契、兔子問題、計算書、算術革命、商業革命、印度-阿拉伯數碼、阿爾·花刺子模



在數學史上，有一位數學家及其著作之聲名，始終都比不上一則與兔子繁殖有關的娛樂數學問題。這位數學家被稱為斐波那契（Fibonacci），其著作是《計算書》，至於這個膾炙人口的兔子問題之原版，則如下列：

某人有一對兔子，養在一個封閉的處所。當它們的天性是在每一個單月中可以生產一對兔子，而後者在下一個月也會生產另一對兔子，吾人希望知道一年之內，究竟有多少對兔子被繁殖出來。

事實上，科普著述提及斐波那契時，通常都是為了說明以他的「名字」來命名的數列，亦即斐波那契數列：

1,

1,
2=1+1,
3=2+1,
5=3+2,
...

等等與兔子繁殖問題之連結，如何地具有數學知識之興味。至於數學史家論及十三世紀西方數學發展時，則大都將印度-阿拉伯數碼的引進西歐，歸功給他。不過，見證此一貢獻的《計算書》(*Liber abbaci*) (公元 1202 年問世)，卻一直被誤認為與計算器「算盤」(*abacus*) 有關。無怪乎在漢字文化圈內，相關的撰述者過去也一直將本書名誤譯為《算盤書》(*Book of the Abacus*)。

平心而論，我年輕時自修數學史，也難以掌握斐波那契的數學經驗，當然更無從體會印度-阿拉伯數碼 (*Arabic-Hindu numeral*) 何以對文藝復興歐洲 — 尤其是義大利 — 的重商主義，竟然有著那麼深遠的影響。直到公元 2002 年閱讀了《計算書》的英譯本之後，¹ 再加上我們的數學史討論班也深入研讀他的另一本著作《平方數之書》(*Liber quadratorum, The Book of Squares*), 1225)，對於他如何屹立於十三世紀西方數學史的地位，才變得比較「立體」起來。這兩本源自拉丁文的英譯，都是美國數學家西格勒 (*Laurence Sigler*) 的貢獻，後者更早問世於 1987 年，可以幫助我們更好地瞭解斐波那契的數論研究。

其實，斐波那契在繼承希臘數學，尤其是數論方面，也有可觀的貢獻。他的《平方數之書》討論二次丟番圖方程，是公元第二世紀丟番圖與十七世紀費馬之間，歐洲數學家在數論方面的經典作品。可惜，在有關費馬最後定理的歷史論述中，該書卻鮮少被提及。這一現象說明了歐洲中世紀數學「長夜漫漫」之說法 — 傳統史家尤其常以「黑暗時代」稱之，是一個很難破除的史學刻板印象。

不過，這一印象所以造成，正如本書《數字人》作者德福林 (*Keith Devlin*) 指出，多半應該歸因於斐波那契的遺產不只存在於「兔子」，也見諸於「石碑」與「洋皮紙」(參看本書第 9 章)。因此，如果不是細心耙梳，恐怕難以還原其真實面目。比如說吧，斐波那契從來就不是《計算書》的作者之真實名字。他的本名是比薩的李奧納多 (*Leonardo of Pisa*) 或直譯義大利文的李奧納多·比薩諾 (*Leonardo Pisano*)。至於斐波那契之名，是由義大利史學家利柏力 (*Guillaume Libri*) 在 1838 年所使用，或許這是因為李奧納多的祖先出自波那契家族 (*filius Bonnaci*) 吧。

¹ 參考拙文，〈十三世紀西歐的數學百科全書：斐波那契的《計算書》〉，收入拙著，《此零非比 0》，台北市：台灣商務印書館，2006。

以上都是本書的內容片段。然而，論及本書內容之豐富，實在難以連結到作者德福林的非數學史專業：他是數學家，但兼具科普書寫的博雅素養。根據我的猜測，德福林應該是接受出版社的邀約，而決定深入探索斐波那契的生平事蹟、數學旅程，以及《計算書》的社會經濟文化脈絡。由於斐波那契的生平資料少得可憐，因此，作者所著力的，是他的數學能力如何在一個重商主義的社會文化中養成，以及他的《計算書》如何見證這一個歷史現象，並成為十五世紀義大利計算學校的教材張本。不過，這反倒成就了本書獨一無二的書寫特色。

當五南編輯穆文娟小姐與我商量本書之中譯時，我立即被此書的特色所吸引。然而，像這樣一本連斐波那契數列與黃金比 $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ 的關係都只是花費五小段篇幅的數學普及書籍，究竟有哪些獨特的賣點呢？現在，且先容許我簡介本書各章之內容。然後，我將提出一得之愚，俾便讀者參考借鑒。

本書第 0 章是開場白。作者德福林說明何以我們現在習焉而不察的印度-阿拉伯數字，是如此不可或缺。這十個數字（number word）0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 原來是數碼（numeral），一開始只是代表數目（number）概念的一種符號，並未當作文字來使用 — 其實，這些數碼在正式的英文書寫中當成文字來使用，也是相當晚近的事。顯然由於斐波那契《計算書》的引介，商人、市民甚至學童才得以理解這種新的算術方法。正如德福林指出，本書不只是引領近代算術渡過地中海的橋樑，它也成為阿拉伯和歐洲數學文化的橋樑，讓西方世界看到形成近代科學和工程基礎的代數思維方式。另一方面，它同時也開啟了現代的金融系統，以及使用精密的銀行方法來做生意的方式。如此說來，斐波那契為何淪落成為歷史上一個偶然的註腳呢？在本章中，作者提供了一些簡要的說明。但更值得注意的，乃是德福林認為有關於李奧納多的一本書，必需注重在他的偉大貢獻和智慧遺產之上。這是因為他領悟到數字，以及用來計算它們的強力和有效方法，會改變這個世界，同時，他也在歐洲即將在科學、技術、和商業行為即將有重大突破的時候，啟程準備改變這世界。

第 1 章的主題是印度-阿拉伯數碼的歷史發展。其中，德福林主要評論羅馬數字系統如 I、II、III、IV 等在乘法與除法方面的不切實用，並藉以指出印度-阿拉伯系統的三個重要的概念設計：數位的標記、位值，以及零。緊接著，德福林按照歷史發展順序，介紹印度數學家如婆羅門笈多有關於這些數碼（特別是 0 與負數）的運算之討論，有關第十世紀法國人葛伯特（Gerbrt，後來的教宗思維二世 Pope Sylvester II）的算盤板之說明，以及阿拉伯數學家如阿爾·花刺子模如何發揚光大，而最終成為《計算書》著述的取材依據。

在第 2、3 章中，德福林簡要介紹斐波那契時代的比薩，及其主要（國際）商港地位在十五世紀被威尼斯取代之之前，它如何孕育像斐波那契這樣的數學家及其《計算書》。斐波那契大約出生於 1170 年代比薩的一個商人家庭，伴隨著他的

成長過程，在比薩所主導的地中海經濟貿易的逐漸國際化之外，義大利的學術文化，也有了巨大的變化，譬如 1088 年，第一間「大學」於比薩東北方約七十英里的波隆那成立了。而在南方的薩萊諾則成立了第一所醫學院，吸引了許多國家的學生。比薩、佛羅倫斯、以及錫耶納的學者，也忙著將希臘人的偉大著作翻譯成拉丁文，這些偉大作者就包括歐幾里得、阿波羅尼斯、阿基米德、亞里斯多德，和蓋倫以及托勒密。而且，不同城市之間的通訊，也因為歐洲第一次出現的郵政服務而更有效率。

儘管如此，斐波那契的「數學旅程」（本書第 3 章）卻不易見證後來促成文藝復興的這些與數學有關的歷史發展。事實上，斐波那契從未上過大學，他應該在修道院或大教堂所轄的初等教育機構接受讀、寫、算（當然是運用羅馬系統），再進入他父親與朋友所管理的「商會館」（*fondaco*）接受簿記員的學徒訓練，最後，當他父親被指派到布及亞的海關擔任公證人時，他被召喚到那裡，「在會計學校中接受教育」。而在後者這兩種教育（或訓練）過程中，印度-阿拉伯數碼及其運算法則之熟悉，顯然都是必要的內容。而由於身為比薩在布及亞的交易代表，斐波那契的父親之工作應該包括：與回教徒官方保持良好關係、保護商會館的權力運作、經過貨物的簿記，以及監督徵稅是否正確 — 而這些活動都顯示他父親必須會說流利的阿拉伯文，因此，他擁有阿拉伯語文素養，當然極為可能。此外，布及亞也處在當代知識之國際交流中心，斐波那契得此利基，充分吸收印度與阿拉伯的數學資產，進而提升他自己的博雅數學素養。更何況阿拉伯人將數學視為一種供商人、土地測量師和工程師使用的技藝，並且會為這些專業人士撰寫書籍。所有這些，當然都為他後來著述《計算書》與《實用幾何》等書，提供了最佳示範。

由於斐波那契及其阿拉伯先驅阿爾·花刺子模有許多的共同點，譬如兩人的傳記資料都少得可憐，兩人的名字都有許多的不確定性，兩人的著作都塞滿了非常多的實用例子。還有，後世學者與史家對於兩人的數學原創力也都莫衷一是，不過，可以確定的，斐波那契這個比薩人是阿爾·花刺子模著作的明顯受益者。德福林在本書第 4 章說明現代學者或史家如何追溯《計算書》的參考源頭，他的主要（且一直重複的）目的，是凸顯阿拉伯數學家對於近代數學（尤其是算術與代數）的貢獻。在本章中，德福林還利用引自阿爾·花刺子模的實例，說明 **algebra** 這個英文字的拉丁語源，對於我們理解代數思維的意義，頗有參考價值。

有了第 4 章的背景說明，德福林利用本書第 5 章簡介《計算書》之內容。本章除了處理與印度-阿拉伯數碼有關的算術之外，還包含了代數與某些應用數學的起源。其中包括某些可能是斐波那契自己發明的方法，但是，也有得自於當時存在的第一手的阿拉伯文本或是拉丁文譯本，有些則來自於他與旅行中遇見的阿拉伯數學家們的討論。最值得注意的，針對所有的情形，他都以古希臘盛行的方

式，提供了嚴格的證明，並且，運用多達六百頁的實際應用例子，闡述說明一切，而這些例子乃是被設計用來練習新方法的作業。

對於想要充分理解計算書內容的讀者，直接閱讀該書，的確是最佳途徑。²請先參考德福林對於該書 XV 章的簡介。一開始，他敘述了如何寫和讀那些以印度十進位系統表示的整數，然後，處理整數的加減乘除四則運算。值得注意的是，在論述加法和減法之前，他就先說明了乘法。此外，他還說明整數除法與簡易分數，以及我們今日所稱的帶分數。

在前 VII 章已經描述過印度-阿拉伯算術的基本計算方法之後，該書其餘的大部分主要處理實用問題。在討論買、賣和商品的價格時，斐波那契使用的即是我們今日所所謂「比例推論法」，並解釋如何使用類似的方法，去管理公司及其股東間的投資與獲利，以及說明如何決定誰該付多少。至於有關「貨幣的成色」之主題，則相當契合當時的主要需求。當時的義大利是全世界不同貨幣最密集的地方，整個中世紀時期中 28 個城市所發行的不同的貨幣，光是托斯卡尼就有 7 種在此流通。這種狀況對貨幣兌換者而言，就是商業利基，而《計算書》在此提供他們有關這類事物的足夠多例題。總之，該書第 VIII 至 XI 章的解法都與比例推理有關。而數學應用的主題，則完全與商業與國際貿易息息相關。

《計算書》最後 IV 章都與代數有關。篇幅甚長的第 XII 章納入 259 個例題，主要聚焦在基本的「代數」-- 不是今日所連結的符號推理，而是以日常語言表現的代數推論，通常稱此為「文辭代數」(rhetorical algebra)。「雙誤法」

(*elchataym*) 則出現在第 XIII 章的章銜當中，它的意涵通常以「雙設法」(Double False Position) 而為吾人所熟知。這個詞是斐波那契對阿拉伯文 *al-khata'ayn* 的拉丁文翻譯，意指「兩個錯誤」。在第 XIV 章中，斐波那契的焦點放在處理方根的方法，他運用了與歐幾里得在《幾何原本》第 10 冊所使用的相同分類方式，區分不同類方根的和與差。在第 XV 章，他處理代數方程式，採用是阿爾·花刺子模所使用的方法。同時，他也履行了他在《計算書》序文中所承諾的，利用幾何與算術之間的連結，以解決算術問題。

《計算書》的問世，為斐波那契到來極高的聲望。在第 6 章中，德福林除了介紹斐波那契的其他著作如《花朵》之外，也提及神聖羅馬皇帝菲特烈二世的豐功偉業，以及斐波那契應邀參加宮廷學術活動，譬如菲特烈二世便要求斐波那契公開地展示他的數學能力，回應三道事先由宮廷數學家約翰尼斯提給他的挑戰問題。這是十三世紀西方科學史上有關科學與宮廷贊助之最珍貴史料。不幸，在

² 英文版請參閱 Sigler, L. E. tr. (2002). *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York / Berlin / Heidelberg: Springer-Verlag. 中譯本請參閱紀志剛中譯，《計算之書》，北京：科學出版社，2008。

1284年，剛好在有關斐波那契最後紀錄的43年後，比薩被它主要的競爭對手熱內亞在海戰中擊敗，導致國際商港地位的淪落。其實，隨著菲特烈在1250年的去世，長期以來為比薩大部分防禦措施提供來源的霍亨斯陶芬王朝，慢慢地走向滅亡，如同這位帝王的兒子、孫子，一個接著一個地死在敵人的手裡。成長中的羊毛工業中心佛羅倫斯，一躍而起成為托斯卡尼地區的第一線城市，同時，北方的威尼斯則取代成為新的世界貿易重鎮，而比薩的地位則快速地滑落到前所未見的地方性小城。今天，世人（尤其是觀光客）所知的比薩，主要由於在斐波那契同時代所建立的比薩斜塔。

第7章主題是斐波那契身後《計算書》的影響。到了十五世紀，為商業圈的非專家，而且是以方言書寫的算術教學用手冊，已經超過一千本了。從目錄來看，它們都很相似，就像《計算書》一樣，這些書籍解釋了如何運用0到9的十個數碼寫下數目字、位值制如何作用，以及如何計算整數與分數。它們也都提供了大量的例題，大部分的題目為實用的商業問題。同時，類似《計算書》，它們的作者也常常提供乘法與平分根的數表，用來幫助某些更複雜問題的解答。不過，它們的篇幅比起《計算書》，要短了許多。這些書籍後來被稱為「計算書籍」或「計算冊子」。至於與計算書籍的發展平行的，是遍及整個義大利的算術學校之成長，這種算術學校稱為「計算學校」，孩童在這裡被教導如何使用印度-阿拉伯數字系統。德福林利用這些背景資料，甚至於這些學校的算術教學進度表，來見證歐洲數學 -- 尤其是代數 -- 的擴張，是大大地被商業世界所推動。事實上，誠如德福林所指出，較好的計算書籍的作者，將斐波那契在他書所傳承下去的代數方法，視為一種實用工具，而這也是阿拉伯人看待代數的方式，以及發展它們的理由。直到十六世紀中葉，代數還都不是在歐洲大學中被教授的一門學科，所有用於設計與建造著名的佛羅倫斯洗禮堂之天堂之門所需的數學，都可以在一本典型的計算書籍中找到。

另一方面，從十四世紀開始，伴隨著身為世界貿易重鎮的地位而來，威尼斯被視為是商業數學方法之朝聖地，自歐洲各地的商人到此地來，學習「義大利的商業技藝」。譬如說吧，德國人來此學習有關商業、貿易的算術以及貨幣兌換事務。這些實務為義大利人發展和使用，在商業、金融業、保險業、兌換、批發貿易、製造業、殖民管理等領域，起了很大的作用。商業世界正快速地轉向我們今日視為理所當然的全球化市場形式。德福林相當有見識地指出，第一本印刷的計算書籍（《翠維索算術》），在靠近威尼斯的地方製成，並不是意外（按：翠維索為威尼斯西方的一個小鎮，共和國於1339年開始接管）。

到十六世紀結束時，全歐洲都在使用的印度-阿拉伯數字系統（今日這些數碼的書寫就是定型於1600年），開展了它勢不可擋地提升，而成為全球性主宰的貿易業和金融業。這是商業革命的開端，但卻是一場取決於有力的，有效率的處

理數字方法的革命。而這種算術革命應該歸功給斐波那契嗎？這是德福林在本書第 8 章想要討論的主題。

換言之，於 1202 年首度問世的《計算書》究竟是否曾經「實質地」影響十五、六世紀計算書籍與計算學校呢？為了回應此一問題，正如德福林指出，吾人必須釐清《計算書》的內容流傳到早期計算書籍書頁內容的路徑。非常幸運地，歷史學家和檔案學者經歷了多年艱苦的努力，並且帶一點好運氣，終於讓這個拼圖的最後一片，在最近的 2003 年歸位。

二〇〇三年，也就是《計算書》問世的 801 年之後，義大利學者拉斐拉·法蘭契（Rafaella Franci）從弗羅倫斯圖書館發現一本匿名的《計算之書》（*Livro de l'abbecho*），「這不是一本原創性的作品。大約有四分之三的問題只是將《計算書》中第 8、9、10 章的問題翻譯成方言」，兔子問題出現在 c.107v 頁，不過，是以鴿子來重新包裝。這本書明顯地是為廣泛的讀者而寫，因為其中每一個問題類型，都是從比《計算書》較為簡易的問題開始。因此，從內容與形式來判斷，法蘭契認為這本《計算之書》，應該就是斐波那契那本已經遺失的《小書》的近似複本。至於後者，則被認為是《計算書》的簡易版，同時也被認定是十五世紀計算書籍的主要參考來源。總之，斐波那契「留下了兩個重要的遺產：第一，綜合他的學術性的書：《計算書》、《實用幾何》、《平方數之書》，導致了近代數學的發展。第二，他的《小書》為所有計算書籍提供了樣板，以及實務的商業算術連帶的成長。」因此，斐波那契開啟了現代算術革命。

最後，在本書第 9 章，德福林記錄了他尋訪了斐波那契的塑像所在、《計算書》1228 年本的手抄本等考察經過，用他自己的「現身說法」，來印證歷史人物與歷史情境的密切連結：「每一個時代都會產生少數幾個人，他們一方面遙遙領先他們的時代，另一方面，卻也是他們時代的產物 — 前者是去想像什麼是可能的？後者則是讓它發生！」斐波那契的「聲名恰如其所，並列了型塑我們的世界和提供我們安身立命之道的其他偉人。」因此，我們毋須旅遊到義大利去看斐波那契的遺產，「我們每一天都跟著它一起生活，尤其是每當我們依賴他引進西方的近代算術去做某些事時。」

如果上述這些類似流水帳的簡介讓讀者迷失了焦點，那麼，追隨斐波那契的步驟，試著求解本書所列舉的一些問題，或許可以幫助我們理解斐波那契為何偉大。我建議的優先問題是第 5 章的「購鳥問題」與「雙誤問題」。你或許會發現前者類同於中國南北朝《張丘建算經》的「百雞術」，後者之解法也曾出現在中國漢代《九章算術》，被稱為「盈不足術」。當然，這種中西數學多元發現（multiple discoveries）的可能案例，應該可以讓讀者引出更多的歷史想像才是。不過，我還要進一步推薦（本書第 6 章所引述）斐波那契所參與的菲特烈宮廷數學競賽的

三個問題。此外，如果你很難理解印度-阿拉伯數碼相對於羅馬數字系統的巨大便利，那麼，請試著利用羅馬數字系統將 MCCLXXVIII（一千二百七十八）自乘（參考第 1 章），吾人大概就比較容易體會了。此外，對於想要說明符號法則如何大大地促進代數的發展的中學教師來說，針對下列問題（本書第 5 章），求解這兩人各有多少銀幣：

假設一人從另一人身上拿走 7 個銀幣，那麼，他的錢數會是第二人的 5 倍；
若第二人從第一人身上拿走 5 個銀幣，那麼，他的錢數會是第一人的 7 倍。

然後，請比較你的現代符號代數解法 vs. 斐波那契的解法，或許我們多少可以向學生說明在數學的學習過程中，概念工具精進的意義何在了。

對於一般讀者，我建議第 0 章開場白瀏覽之後，就可以各取所需。譬如說吧，如果你要知道斐波那契如何繼承印度-阿拉伯數學遺產，那麼，精讀第 1、4 章就很有幫助。另一方面，如果讀者想要「實質地」補充西洋史的中世紀部份，那麼，第 2、3 章有關比薩的崛起成為地中海的國際貿易中心，尤其印度-阿拉伯數學遺產如何成為數學商業化的憑藉，就是最佳的參考文獻。至於在這個數學與商業的密切關連上，斐波那契的遺產如何地繼往開來，也可以在本書第 7 章找到非常深入的說明。總之，本書的相關章節可以當作中世紀歐洲社會經濟史的材料來閱讀，我們採取數學 vs. 商業的角度，一定可以找到絕佳的切入點。

事實上，本書有關數學 vs. 商業的對比，是德福林在歷史脈絡（**historical context**）中評價斐波那契的最大貢獻。我自己身為專業的數學史家，最想利用本書與讀者分享的題材，則是菲特烈宮廷數學競賽活動所反映的數學 vs. 贊助之歷史案例（第 6 章），以及十五、六世紀以威尼斯為中心的計算學校如何運作（第 7 章），甚至數學的手抄本如何製作與流傳，以及於它如何過渡到印刷本的過程（第 8 章）。這些數學社會史（**social history of mathematics**）的史實，為我們補充了一般西方（數學）通史書籍有關中世紀歐洲部份的不足，也讓本書在科普書寫之外，添加了數學史專業維度的視窗。因此，本書雅俗共賞，無論對一般讀者或學者專家來說，都值得高度推薦。

作者簡介：

齊斯·德福林是史丹佛大學人文科學與尖端科技研究中心共同創辦人與資深研究員。同時，他也是該校數學系的顧問以及 **Media X** 研究網絡的創立人之一。他是世界經濟論壇（**World Economic forum**）與美國科學促進會（**American Association for the Advancement of Science**）這兩個組織的會士。他目前致力於針對廣大的閱聽大眾，研究如何使用不同媒介來教授數學以及傳播數學。他已經出版三十二本著作，以及八十多篇論文。他是畢達哥拉斯獎、皮亞諾獎和卡爾·

沙根科普獎的得主。他也是美國國家公共電台“Math Guy”節目的主持人，此外，他也為 MAA（Mathematical Association of America）的線上雜誌撰寫“Devlin’s Angle”專欄。他目前居住在美國加州帕洛阿爾托市。