

導讀《掉進牛奶裡的 e 和玉米罐頭上的 π 》

洪萬生

書名：掉進牛奶裡的 e 和玉米罐頭上的 π ：從 1089 開始的 16 段不思議數學之旅
(*1089 and All That: A Journey into Mathematics*)

作者：大衛·艾契森 (David Acheson)

譯者：洪萬生、洪碧芳、黃俊瑋

出版社：臉譜出版社，台北市

出版資料：平裝，定價 260 元

出版日期：2013 年 02 月 08 日

ISBN：9789862352335

關鍵詞：1089、數學小品、應用數學、證明、 e 、 π



一、前言

一本數學普及小品竟然運用一個「等式」充當書名，而且，其中還有一個十分特別的數目 1089！事實上，本書是作者 David Acheson 從 1089 起程的一趟數學列車之旅。

1089 為何有趣？原來它相當魔幻！任選一個三位數，譬如說 752 好了。將它的百位數與個位數對調，得 257，再將這兩個三位數相減（大減小），得 $752-257=495$ 。現在，再將 495 的百位數與個位數對調，得 594。最後，將 495 與 594 相加： $495+594=1089$ 。這是一個對於數學再怎麼無感的人都會好奇的問題，緊接著，或許我們就可以討論它的所以然之故了。

一般而言，應用數學家書寫科普或進行數學通識教學，大都喜歡強調數學知

識的有用面向 (utility)。本書作者 David Acheson 是一位應用數學家，目前是英國牛津大學耶穌學院終身會士 (Fellow emeritus)，為什麼他將這個挑起讀者好奇心的數目 1089 當作本書的引子呢？原來他在 10 歲時 — 10 歲果然重要，安德魯·懷爾斯 (Andrew Wiles) 也是在 10 歲時，邂逅費馬最後定理 — Acheson 從一本兒童普及刊物 *I-SPY Annual* (1956 年) 讀到魔術師如何運用這個魔幻數目。也因此忽忽 40 年過去了，他總是念茲在茲第一流數學定理或結果所真正製造的驚奇 (wonder) ！

二、內容簡介

這本小書總共有 16 章，目錄依序如下：

- 1 1089 以及所有其他 (1089 and All That)
- 2 「愛上幾何」 ('In Love with Geometry')
- 3 但……那是荒謬的 (But...that's Absurd...)
- 4 代數好麻煩 (The Trouble with Algebra)
- 5 天體運行 (The Heavens in Motion)
- 6 一切都在改變！ (All Change!)
- 7 關於越小越好這回事 (On Being as Small as Possible)
- 8 「我們快到了嗎？」 ('Are We Nearly There?')
- 9 π 的一頁簡史 (A Brief History of π)
- 10 優美的振動 (Good Vibrations)
- 11 偉大的錯誤 (Great Mistakes)
- 12 所有生命的秘密是什麼？ (What is the Secret of All Life?)
- 13 $e=2.718\dots$ ($e=2.718\dots$)
- 14 混沌與劇變 (Chaos and Catastrophe)
- 15 不全然是印度通天繩 (Not Quite the Indian Rope Trick)
- 16 實或虛？ (Real and Imaginary?)

現在，我們依序簡介各章內容。在第 1 章中，作者從 1089 的驚奇 (wonder) 說起，希望帶領讀者 (不管多大多小) 搭上數學快車，一同欣賞數學中的令人驚奇定理 (wonderful theorems)、美麗證明 (beautiful proofs) 以及偉大應用 (great applications)。

第 2 章一開始的插曲，則是英國 17 世紀唯物機械論哲學家霍布士 (Thomas Hobbes, 1588-1679) 學習歐幾里得《幾何原本》的插曲。霍布士四十歲那一年才初識幾何原本所呈現的數學知識之確定性，他的切入點是畢氏定理的證明 — 《幾何原本》第一冊第 47 命題。在研讀此一證明時，他發現他必須逆溯第一冊第 1 到第 46 的某些命題。這種確定性 (certainty) 讓他「愛上幾何」 (in love with

geometry)，終生不渝！除了畢氏定理之外，本章也討論圓面積公式，特別是圓周率 π 及其展開式 — 萊布尼茲級數：

$$\pi/4=1-(1/3)+(1/5)-(1/7)+\dots$$

類似這種令人驚奇的連結（connections），譬如 π 與奇數的關係，在數學中處處可見。還有，作者還提及叫人討喜的拓樸學圖形，以及最重要的，舉例說明證明在數學中是如何重要，尤其是我們將某些延拓（generalization）視為理所當然時：由於

- 圓周上 2 點之連線可將此圓分成 2 個區域；
- 圓周上 3 點之連線可將此圓分為 4 個區域；
- 圓周上 4 點之連線可將此圓分為 8 個區域；
- 圓周上 5 點之連線可將此圓分為 16 個區域；

依此類推（analogy），「圓周上 6 點之連線」當然「可將此圓分為 32 個區域」了！然而，此一猜測卻是大錯特錯，¹因此，證明就變得不可或缺了。

在第 3 章一開始，作者引述柯南·道爾的《綠玉冠探案》（*The Adventure of the Beryl Coronet*）結語，讓福爾摩斯說明歸謬法的重要性。作者的第一個例子，是歐拉（Euler）的克尼斯堡七橋問題。第二是有關質數是無窮多的證明。第三則是費馬最後定理。針對最後這個例子，作者說明 $n=3$ 的情況差一點成立：

$$729^3+244^3=401,947,273$$
$$738^3=401,947,272.$$

第 4 章主題是（中學）代數。作者的引子有十九世紀早期法國小說家 Stendhal，以及 1953 年英國一個童話故事主角 Molesworth 的認知困擾。²針對後者，作者認為運用代數方法證明 1089 何以魔幻，應該足以說明代數如何有用了。此外，作者還引進座標概念，說明代數更是有助於解決幾何問題。

第 5 章主題是天體運動，作者首先引述美國媒體有關哈雷彗星在 1910 年接近地球軌道時，社會大眾如何恐慌的新聞。然後，進一步說明克卜勒與牛頓的傑出貢獻。其中，作者當然頗多仰賴於當時的數學文本，譬如牛頓的經典《原理》（*Principia*）。

¹ 在本書中，作者提供了正確答案 31，至於通式則是 $(1/24)(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$ 。

² 此一主角出自 Geoffrey Williams 與 Ronald Searle 合著的 *Down with Skool!*

第 6 章主題是變化率 (rate of change)，並藉以引出微積分。不過，它的重點擺在微分法上。至於第 7 章則是運用微分法來處理自然界中的極值問題。在一般人所熟悉的問題之外，作者也提及最小曲面與最速降線等問題及其求解。此外，他還介紹路線網路問題 (road network problem)：如何運用路線網路連結不同的城鎮，使得路線越短越好。對於四個城鎮來說，最短的路線網路長度恰好等於 $1 + \sqrt{3}$ 。至於此一路徑如何取得，則可以運用肥皂泡膜來試驗。輔以實驗，這是本書作者闡揚數學真理的一個重要進路。

第 8 章主題是無窮級數 (收斂與發散)，並且利用它來定義曲線邊界的平面區域之面積，以及像 $\sqrt{2}$ 這樣的無理數。為何 $\sqrt{2}$ 是無理數呢？顯然，這就需要證明了。除了這個歸謬證明 (*reductio ad absurdum*) 之外，作者也引進了數學歸納法。

在第 9 章中，作者介紹了圓周率 π 的簡史。這個題材一向為科普書寫所歡迎。作者先定義 π ，然後，由於該定義與圓面積無涉，因此，吾人必須證明何以圓面積 $= \pi r^2$ 。作者所提供的證法，是將圓面積近似為

$$(1/2) \cdot (\text{圓內接正 } n \text{ 邊形的周長}) \cdot (\text{等腰三角形的高})$$

其中這個等腰三角形是由圓內接正 n 邊形分解而成，直觀而自然，值得肯定。當然由於本章主題是 π 的簡史，所以，作者緊接著概述了 π 的近似值發展史，其中作者尤其指出萊布尼茲級數與歐拉級數之意義，另外，他還介紹十八世紀法國數學家卜豐 (Buffon) 如何從機率來看 π 。

第 10 章主題是樂音、弦振與正餘弦函數之關係。這是主要訴求實用的一章，作者也提及他自己玩爵士吉他的經驗。到了第 11 章，作者又拉回數學有趣的面向。現在，他的主題是「驟下結論」(jump to conclusion) 難以避免的風險。他所舉出的第一個例子有 *Malfatti* 問題，亦即：給定一個三角形內，做出 3 個不重疊的圓形，使得它們所佔的面積最大。這是 1803 年 *Malfatti* 所提出並宣稱解決的問題，但是，直到 1967 年，才被 *Michael Goldberg* 指出其誤謬，並提供正確解答。數學家的這種「大膽假設」，歐拉絕不缺席。作者提及他在證明費馬最後定理在 $n=3$ 為真之後，即猜測三個四次方的和等於一個四次方，四個五次方之和等於一個五次方等等，也都是不可能。沒想到到了 1966 年，*Lander* 和 *Parkin* 提出反例： $27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$ 。對於歐拉的賢者之失，數學社群不管是十八世紀或二十一世紀，一點都不介意，真是令人羨慕。有關驟下結論之例子，作者還提出無窮級數求和問題，以及 1917 年由日本數學家 *Takeya* 所提出的所謂 *Takeya* 問題。

第 12 章主題是微分方程。作者以十八世紀的力學、十九世紀的電磁學、二十世紀的量子力學，以及二十一世紀的生物學為例，說明微分方程及其求解的核心位置。作者在本章一開始所運用的引子，是他在中學時代，生物老師所出的數年如一日的考題中的第 23 題：所有生命的秘密是什麼？現在，有了微分方程，

這個問題就有了最好的切入點了。

第 13 章主題是歐拉數 $e=2.718\dots$ 。作者介紹此一主題的引子是複利的計算。此一計算當然與下列極限式有關： $(1+1/n)^n \rightarrow e$ 。與 π 一樣，這個歐拉數在很多領域中一直現身，不過，最著名的例子，莫過於變化率永遠等於自身的數量問題，這些都是自然界中所謂的指數成長（exponential growth）問題。作者指出這個 e 不僅規範了疾病的傳染擴散，針對不穩定（instability）系統，譬如一滴奶掉下一碗奶表面時所造的擾動現象，我們也可以找到 e 的蹤跡。最後，作者在本章中，也給出了 e 的無窮級數展開式： $e=1+1+1/2+1/(2 \cdot 3)+1/(2 \cdot 3 \cdot 4)+\dots$ 。

第 14 章主題是應用數學領域中最夯的「混沌與劇變」，作者應用簡單的實驗（含皂膜實驗，以及網頁上的計算機模擬 animation），提供了相當簡要的說明。第 15 章主題也是應用數學，作者在此介紹了他自己的研究成果，那是與多支點（pivot）的複單擺（multiple pendulum）運動有關，歷史上可以追溯到 1738 年的丹尼爾·伯努利（Daniel Bernoulli）。

第 16 章主題是「實或虛」？作者在本章也是本書的最後結語，是說明何以歐拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 備受數學家寵愛。為此，虛數如何進入歷史舞台（譬如，由解三次方程式（而非二次）進入），以及歐拉如何在他的微積分教科書中，將虛數與正餘弦函數的幕級數展開式等等連結，而得出同樣精彩的歐拉等式： $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 。現在，這列數學快車已經抵達終點站了。作者為了呼應他在上車前的叮嚀（參見第 1 章），亦即：讓我們一同欣賞數學中的令人驚奇的定理、美麗的證明，以及偉大應用，於是，他引述歐拉在 1748 年如何證明上述等式，展演了數學知識的這三個本質面向。

三、評論

本書作者專長是應用數學，也是一位爵士吉他樂迷，本書第 10 章內容，應該是他應邀為數學團體如 The Mathematical Association 演講的現身說法。³如果我們徵之於他從十八世紀的研究成果中，找到多樞紐複單擺的相關問題之事實，即可發現他非常熟稔數學史，尤其是微分方程的歷史發展。這種博雅的興趣，讓他廣泛涉獵數學史，也因而豐富了本書的敘事。

事實上，他在適當脈絡插入數學史實，不僅用以潤滑數學知識的鋪陳，也有助於開啟新的單元或話題。譬如，作為第 4 章的結語，他讓笛卡兒現身說法，以便引出第 5 章有關圓錐曲線（或二次曲線）如何在天體運動的說明上，發揮令人意想不到的效果。至於第 5 章有關克卜勒與牛頓的行星運動之定律，則當然最好

³ 這個英國數學教育協會的美國版本是 The Mathematical Association of America (MAA)，他們的積極活動參與者包括了數學家、數學教授、數學教育家與中學教師。

讓十七世紀的當事人自行解說了。還有，他讓邦貝利 (R. Bombelli) 而非卡丹諾 (G. Cardano) 來「引進」虛數，足見他對相關史實，擁有了相當體貼細緻的素養。

這種在歷史脈絡中介紹數學，並不只是敘說與人有關的故事而已。譬如，作者雖然指出 π 的萊布尼茲級數展開式之重要性，然而，他也未曾忘記強調如果吾人按此級數來計算 π 的近似值到 3.14 — 兩千多年前阿基米德即已達到的近似值，那麼，所需要計算的項數就遠遠地超過三百個。這種時刻不忘「實用」的進路，的確凸顯了數學知識的價值與意義。

最後，本書所涵蓋數學內容主要是分析學為主，再加上一點點必要是微分方程。這顯然是作者基於他自己的應用數學背景所做的選擇。由於分析學或微分方程對於一般讀者有相當程度的隔閡或陌生，因此，作者的選材與呈現就顯得十分要緊。整體來看，作者在處理這些題材時，筆觸極輕，但又不失實質內容，尤其，他更是將他自己有關多樞紐複單擺的最前沿研究結果，深入淺出地介紹給讀者。由此可見，他的普及書寫具有相當的功力。

另一方面，就敘事來說，本書作者在每章開始，總是設法挑起讀者的閱讀動機。這種策略像極了數學教師上課時所運用的「引起動機」。此外，他也相當擅用比喻，譬如，他將數學歸納法之證明步驟比喻為連著一節節車廂的火車，於是，第一節啟動後，可以拉動第二節，第二節啟動後，可以拉動第三節等等。顯然，此一敘事頗為形象與生動，也可以說明歸納假設 (inductive hypothesis) 之意義。不過，此一說法忽略了數學歸納法所證明的命題都涉及的無窮概念。

有關本書之訂正也請注意如下：p. 27 有關安德魯·懷爾斯 (Andrew Wiles) 之成功證明費馬最後定理之正確年份，應該是 1994 年而非 1993 年！事實上，懷爾斯在 1993 年 6 月返回劍橋發表研究成果時，他的證明中有一個當時無法彌補的重大邏輯瑕疵，一直到 1994 年，他才成功地彌補了此一漏洞。至於正式的論文，則是發表在 1995 年的《數學年鑑》(Annals of Mathematics) 上。再有，懷爾斯也因為此一傑出貢獻，而榮獲 1998 年國際數學家聯盟所頒贈的特別獎。那是因為當時他已年過四十歲，按慣例無法獲得費爾茲獎 (Fields Medal) 了。

2013/2/13 附註：本文原以「數學列車 1089 號啟程」為名，評論本書之英文版，刊於本博物館「科普深度書評」專欄。現在本書已經中譯，特將其中目次之中文版附上，再重刊一次，以饗讀者。在此，我要特別感謝洪碧芳教授、黃俊瑋 (博士候選人) 與我一起合作翻譯此書。