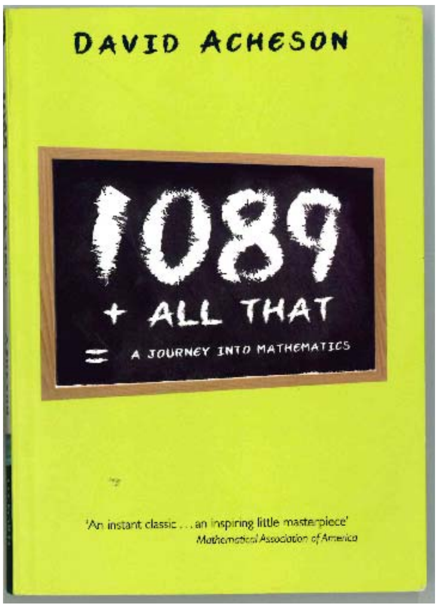
數學列車 1089 號啟程

洪萬生
台灣師範大學數學系退休教授

書名：**1089+All That = A Journey Into Mathematics**
作者：**David Acheson**
出版社：**Oxford University Press, Oxford**
出版資料：**v+178 pp, paperback**
出版年：**2012** 年
ISBN 978-0-19-959002-5
關鍵詞：1089、數學小品、應用數學



一、前言

一本數學普及小品竟然運用一個「等式」充當書名，而且，其中還有一個十分特別的數目 **1089**！事實上，本書是作者 **David Acheson** 從 **1089** 起程的一趟數學列車之旅。

1089 為何有趣？原來它相當魔幻！任選一個三位數，譬如說 **752** 好了。將它的百位數與個位數對調，得 **257**，再將這兩個三位數相減（大減小），得 **752-257=495**。現在，再將 **495** 的百位數與個位數對調，得 **594**。最後，將 **495** 與 **594** 相加：**495+594=1089**。這是一個對於數學再怎麼無感的人都會好奇的問題，緊接著，或許我們就可以討論它的所以然之故了。

一般而言，應用數學家書寫科普或進行數學通識教學，大都喜歡強調數學知

識的有用面向（**utility**）。本書作者 **David Acheson** 是一位應用數學家，目前是英國牛津大學耶穌學院終身會士（**Fellow emeritus**），為什麼他將這個挑起讀者好奇心的數目 **1089** 當作本書的引子呢？原來他在 **10** 歲時 － **10** 歲果然重要，安德魯‧懷爾斯（**Andrew Wiles**）也是在 **10** 歲時，邂逅費馬最後定理 － **Acheson** 從一本兒童普及刊物 ***I-SPY Annual***（**1956** 年）讀到魔術師如何運用這個魔幻數目。也因此忽忽 **40** 年過去了，他總是念茲在茲第一流數學定理或結果所真正製造的驚奇（**wonder**）！

二、內容簡介

這本小書總共有 **16** 章，目錄依序如下：

現在，我們依序簡介各章內容。在第 **1** 章中，作者從 **1089** 的驚奇（**wonder**）說起，希望帶領讀者（不管多大多小）搭上數學快車，一同欣賞數學中的令人驚奇定理（**wonderful theorems**）、美麗證明（**beautiful proofs**）以及偉大應用（**great applications**）。

第 **2** 章一開始的插曲，則是英國 **17** 世紀唯物機械論哲學家霍布士（**Thomas Hobbes, 1588-1679**）學習歐幾里得《幾何原本》的插曲。霍布士四十歲那一年才初識幾何原本所呈現的數學知識之確定性，他的切入點是畢氏定理的證明 －《幾何原本》第一冊第 **47** 命題。在研讀此一證明時，他發現他必須逆溯第一冊第 **1** 到第 **46** 的某些命題。這種確定性（**certainty**）讓他「愛上幾何」（**in love with**

geometry），終生不渝！除了畢氏定理之外，本章也討論圓面積公式，特別是圓周率π及其展開式 － 萊布尼茲級數：

$$\pi/4=1-(1/3)+(1/5)-(1/7)+\ldots$$

類似這種令人驚奇的連結（**connections**），譬如π與奇數的關係，在數學中處處可見。還有，作者還提及叫人討喜的拓樸學圖形，以及最重要的，舉例說明證明在數學中是如何重要，尤其是我們將某些延拓（**generalization**）視為理所當然時：由於

圓周上 2 點之連線可將此圓分成 2 個區域；
圓周上 3 點之連線可將此圓分為 4 個區域；
圓周上 4 點之連線可將此圓分為 8 個區域；
圓周上 5 點之連線可將此圓分為 16 個區域；

依此類推（**analogy**），「圓周上 **6** 點之連線」當然「可將此圓分為 **32** 個區域」了！然而，此一猜測卻是大錯特錯，[1]因此，證明就變得不可或缺了。

在第 **3** 章一開始，作者引述柯南•道爾的《綠玉冠探案》（***The Adventure of the Beryl Coronet***）結語，讓福爾摩斯說明歸謬法的重要性。作者的第一個例子，是歐拉（**Euler**）的克尼斯堡七橋問題。第二是有關質數是無窮多的證明。第三則是費馬最後定理。針對最後這個例子，作者說明 $n=3$ 的情況差一點成立：

$729^3+244^3=401{,}947{,}273$
$738^3=401{,}947{,}272.$

第 **4** 章主題是（中學）代數。作者的引子有十九世紀早期法國小說家 **Stendhal**，以及 **1953** 年英國一個童話故事主角 **Molesworth** 的認知困擾。[2]針對後者，作者認為運用代數方法證明 **1089** 何以魔幻，應該足以說明代數如何有用了。此外，作者還引進座標概念，說明代數更是有助於解決幾何問題。

第 **5** 章主題是天體運動，作者首先引述美國媒體有關哈雷彗星在 **1910** 年接近地球軌道時，社會大眾如何恐慌的新聞。然後，進一步說明克卜勒與牛頓的傑出貢獻。其中，作者當然頗多仰賴於當時的數學文本，譬如牛頓的經典《原理》（***Principia***）。

---

[1] 在本書中，作者提供了正確答案 31，至於通式則是 $(1/24)(n^4-6n^3+23n^2-18n+24)$ 。
[2] 此一主角出自 Geoffrey Williams 與 Ronald Searle 合著的 *Down with Skool!*

第 **6** 章主題是變化率（**rate of change**），並藉以引出微積分。不過，它的重點擺在微分法上。至於第 **7** 章則是運用微分法來處理自然界中的極值問題。在一般人所熟悉的問題之外，作者也提及最小曲面與最速降線等問題及其求解。此外，他還介紹路線網路問題（**road network problem**）：如何運用路線網路連結不同的城鎮，使得路線越短越好。對於四個城鎮來說，最短的路線網路長度恰好等於$1+\sqrt{3}$。至於此一路徑如何取得，則可以運用肥皂泡膜來試驗。輔以實驗，這是本書作者闡揚數學真理的一個重要進路。

第 **8** 章主題是無窮級數（收斂與發散），並且利用它來定義曲線邊界的平面區域之面積，以及像$\sqrt{2}$這樣的無理數。為何$\sqrt{2}$是無理數呢？顯然，這就需要證明了。除了這個歸謬證明（***reductio ad absurdum***）之外，作者也引進了數學歸納法。

在第 **9** 章中，作者介紹了圓周率π的簡史。這個題材一向為科普書寫所歡迎。作者先定義π，然後，由於該定義與圓面積無涉，因此，吾人必須證明何以圓面積＝$\pi \boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}$。作者所提供的證法，是將圓面積近似為

(1/2)・(圓內接正 ***n*** 邊形的周長**)・(**等腰三角形的高**)**

其中這個等腰三角形是由圓內接正 ***n*** 邊形分解而成，直觀而自然，值得肯定。當然由於本章主題是π的簡史，所以，作者緊接著概述了π的近似值發展史，其中作者尤其指出萊布尼茲級數與歐拉級數之意義，另外，他還介紹十八世紀法國數學家卜豐（**Buffon**）如何從機率來看π。

第 **10** 章主題是樂音、弦振與正餘弦函數之關係。這是主要訴求實用的一章，作者也提及他自己玩爵士吉他的經驗。到了第 **11** 章，作者又拉回數學有趣的面向。現在，他的主題是「驟下結論」（**jump to conclusion**）難以避免的風險。他所舉出的第一個例子有 ***Malfatti* 問題**，亦即：給定一個三角形內，做出 **3** 個不重疊的圓形，使得它們所佔的面積最大。這是 **1803** 年 **Malfatti** 所提出並宣稱解決的問題，但是，直到 **1967** 年，才被 **Michael Goldberg** 指出其誤謬，並提供正確解答。數學家的這種「大膽假設」，歐拉絕不缺席。作者提及他在證明費馬最後定理在 ***n*=3** 為真之後，即猜測三個四次方的和等於一個四次方，四個五次方之和等於一個五次方等等，也都是不可能。沒想到到了 **1966** 年，**Lander** 和 **Parkin** 提出反例：$\mathbf{27^5+84^5+110^5+133^5=144^5}$。對於歐拉的賢者之失，數學社群不管是十八世紀或二十一世紀，一點都不介意，真是令人羨慕。有關驟下結論之例子，作者還提出無窮級數求和問題，以及 **1917** 年由日本數學家 **Kakeya** 所提出的所謂 ***Kakeya* 問題**。

第 **12** 章主題是微分方程。作者以十八世紀的力學、十九世紀的電磁學、二十世紀的量子力學，以及二十一世紀的生物學為例，說明微分方程及其求解的核心位置。作者在本章一開始所運用的引子，是他在中學時代，生物老師所出的數年如一日的考題中的第 **23** 題：所有生命的秘密是什麼？現在，有了微分方程，

這個問題就有了最好的切入點了。

第 **13** 章主題是歐拉數 ***e*=2.718…**。作者介紹此一主題的引子是複利的計算。此一計算當然與下列極限式有關：$(1+1/n)^n \to e$。與 π 一樣，這個歐拉數在很多領域中一直現身，不過，最著名的例子，莫過於變化率永遠等於自身的數量問題，這些都是自然界中所謂的指數成長（**exponential growth**）問題。作者指出這個 ***e*** 不僅規範了疾病的傳染擴散，針對不穩定（**instability**）系統，譬如一滴奶掉下一碗奶表面時所造的擾動現象，我們也可以找到 ***e*** 的蹤跡。最後，作者在本章中，也給出了 ***e*** 的無窮級數展開式：$e=1+1+1/2+1/(2\cdot3)+1/(2\cdot3\cdot4)+\ldots$。

第 **14** 章主題是應用數學領域中最夯的「混沌與劇變」，作者應用簡單的實驗（含皂膜實驗，以及網頁上的計算機模擬 **animation**），提供了相當簡要的說明。第 **15** 章主題也是應用數學，作者在此介紹了他自己的研究成果，那是與多樞紐（**pivot**）的複單擺（**multiple pendulum**）運動有關，歷史上可以追溯到 **1738** 年的丹尼爾・伯努利（**Daniel Bernoulli**）。

第 **16** 章主題是「實或虛」？作者在本章也是本書的最後結語，是說明何以歐拉公式 $e^{i\pi}=-1$ 備受數學家寵愛。為此，虛數如何進入歷史舞台（譬如，由解三次方程式（而非二次）進入），以及歐拉如何在他的微積分教科書中，將虛數與正餘弦函數的冪級數展開式等等連結，而得出同樣精彩的歐拉等式：$e^{ix}=\cos x+i\sin x$。現在，這列數學快車已經抵達終點站了。作者為了呼應他在上車前的叮嚀（參見第 **1** 章），亦即：讓我們一同欣賞數學中的令人驚奇的定理、美麗的證明，以及偉大應用，於是，他引述歐拉在 **1748** 年如何證明上述等式，展演了數學知識的這三個本質面向。

三、評論

本書作者專長是應用數學，也是一位爵士吉他樂迷，本書第 **10** 章內容，應該是他應邀為數學團體如 **The Mathematical Association** 演講的現身說法。[3]如果我們徵之於他從十八世紀的研究成果中，找到多樞紐複單擺的相關問題之事實，即可發現他非常熟稔數學史，尤其是微分方程的歷史發展。這種博雅的興趣，讓他廣泛涉獵數學史，也因而豐富了本書的敘事。

事實上，他在適當脈絡插入數學史實，不僅用以潤滑數學知識的鋪陳，也有助於開啟新的單元或話題。譬如，作為第 **4** 章的結語，他讓笛卡兒現身說法，以便引出第 **5** 章有關圓錐曲線（或二次曲線）如何在天體運動的說明上，發揮令人意想不到的效果。至於第 **5** 章有關克卜勒與牛頓的行星運動之定律，則當然最好

[3] 這個英國數學教育協會的美國版本是 The Mathematical Association of America (MAA)，他們的積極活動參與者包括了數學家、數學教授、數學教育家與中學教師。

讓十七世紀的當事人自行解說了。還有，他讓邦貝利（**R. Bombelli**）而非卡丹諾（**G. Cardano**）來「引進」虛數，足見他對相關史實，擁有了相當體貼細緻的素養。

這種在歷史脈絡中介紹數學，並不只是敘說與人有關的故事而已。譬如，作者雖然指出π的萊布尼茲級數展開式之重要性，然而，他也未曾忘記強調如果吾人按此級數來計算π的近似值到 **3.14 --** 兩千多年前阿基米德即已達到的近似值，那麼，所需要計算的項數就遠遠地超過三百個。這種時刻不忘「實用」的進路，的確凸顯了數學知識的價值與意義。

最後，本書所涵蓋數學內容主要是分析學為主，再加上一點點必要是微分方程。這顯然是作者基於他自己的應用數學背景所做的選擇。由於分析學或微分方程對於一般讀者有相當程度的隔閡或陌生，因此，作者的選材與呈現就顯得十分要緊。整體來看，作者在處理這些題材時，筆觸極輕，但又不失實質內容，尤其，他更是將他自己有關多樞紐複單擺的最前沿研究結果，深入淺出地介紹給讀者。由此可見，他的普及書寫具有相當的功力。

另一方面，就敘事來說，本書作者在每章開始，總是設法挑起讀者的閱讀動機。這種策略像極了數學教師上課時所運用的「引起動機」。此外，他也相當擅用比喻，譬如，他將數學歸納法之證明步驟比喻為連著一節節車廂的火車，於是，第一節啟動後，可以拉動第二節，第二節啟動後，可以拉動第三節等等。顯然，此一敘事頗為形象與生動，也可以說明歸納假設（**inductive hypothesis**）之意義。不過，此一說法忽略了數學歸納法所證明的命題都涉及的無窮概念。

有關本書之訂正也請注意如下：**p. 27** 有關安德魯・懷爾斯（**Andrew Wiles**）之成功證明費馬最後定理之正確年份，應該是 **1994** 年而非 **1993** 年！事實上，懷爾斯在 **1993** 年 **6** 月返回劍橋發表研究成果時，他的證明中有一個當時無法彌補的重大邏輯瑕疵，一直到 **1994** 年，他才成功地彌補了此一漏洞。至於正式的論文，則是發表在 **1995** 年的《數學年鑑》（***Annals of Mathematics***）上。再有，懷爾斯也因為此一傑出貢獻，而榮獲 **1998** 年國際數學家聯盟所頒贈的特別獎。那是因為當時他已年過四十歲，按慣例無法獲得費爾茲獎（**Fields Medal**）了。