

推薦《1, 2, 3 和 $+-\times\div$ 的數學旅行》

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

書名：《1, 2, 3 和 $+-\times\div$ 的數學旅行》

作者：大衛·柏林斯基 (David Berlinski)

中譯者：甘錫安

推薦序：洪萬生

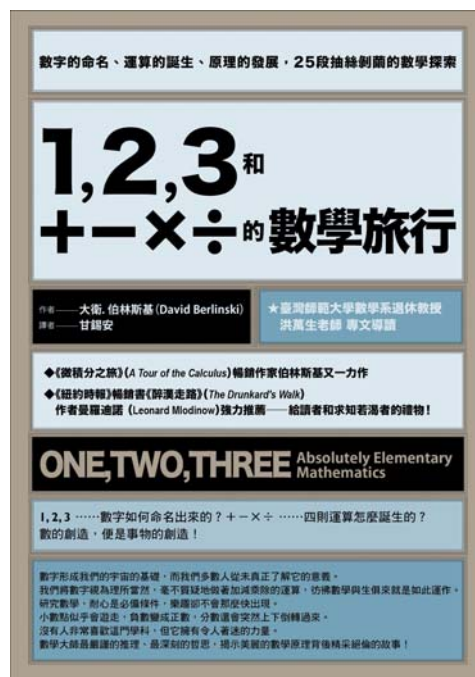
出版資料：271 頁，平裝本，定價新台幣 320 元

出版社：臉譜出版社，台北市

出版年月：2012 年 6 月

ISBN 9789862351833

關鍵詞：數學基礎、數學史、數學普及



就數學普及書寫而言，本書主題近於大學數學系的傳統課程《數學基礎》(foundations of mathematics)，是相當罕見且具膽識的選擇。顧名思義，數學基礎探討最基本的數學知識（如自然數概念等）的本質，尤其為什麼它具有確定性(certainty)。這或許可以解釋何以作者提出他所說的「超基礎數學」(absolutely elementary mathematics)。

由於本書說理與敘事兼備，儘管前者是重頭戲，不過，有時候為了讓讀者暫時擺脫邏輯的必然性「壓力」，作者會在適當時機提供敘事(narrative)。因此，

除了在相關脈絡中引進數學家的故事或文學性作品之外，作者也運用了許多比喻（metaphor），讓讀者對於他的說理有了更溫潤的理解可能。

一般來說，具有數學洞察力與寫作才華的數學家書寫普及作品時，都很喜歡針對數學世界進行比喻，以便強化他們的敘事與說明。他們除了模仿啟蒙運動思想家將數學知識比喻成一棵大樹之外，像史都華（Ian Steward）就將數學比喻成為一座風景區，如此一來，他就可以搖身一變為風景區的導覽志工。至於本書作者則「設想數學就像一個城市，城市天際線的主角是三座雄偉的高塔。這三座宏偉的建物分別屬於『幾何』、『分析』和『代數』，探究的對象各是空間、時間及符號和結構。」在這樣的藍圖中，作者希望他所陪伴的主人翁自然數、0、負數和分數，可以為我們訴說這座數學城市的故事。

不過，本書最精彩的比喻，則是在第 21 堂課中，將環（ring）的三重抽象概念類比到法律上的契約的三種內涵。對比威利斯頓（Williston）的《契約》（Contracts），作者指出：在數學這一邊，首先的要求是數學家（以及讀者）願意接受公理所進行的壓縮；其次，數學家（以及讀者）願意把眼光投向剛開始要求我們接受公理的主題之外；最後，願意在公理系統中找出完全由公理創造的事物。而在法律這一邊，則威利斯頓注意到「法律將履行契約視為義務」；其次，法官或陪審團著手瞭解某些雙邊協議中有承諾約束；最後，願意瞭解契約法所說的契約是什麼。由於數學知識的確定性來自邏輯的「必然性」，因此，作者顯然企圖呼應契約中的某種法律「強制性」。

基於此一數學 vs. 法學之比喻，我們很容易可以猜測本書在數學論證方面的講究。現在，讓我簡介本書內容，或許讀者可以據以體會作者的用心。

本書共有二十五堂課，其中第 5、13、16 課分別以整課的篇幅，介紹三位數學家（阿伯拉、狄摩根和索菲雅·卡巴列夫斯基）的故事，其餘 22 課內容，就圍繞在自然數、0、負數與分數之概念及其運算所產生的抽象數學結構上。第 1-3 課主題是自然數與 0 的命名及位置記數法，其中並提及如何利用集合來定義自然數。在第 4 課中，作者介紹邏輯學中有關推論形式之意義，特別是與自然數的連結。第 6-7 課主題是公理系統與皮亞諾公理（Peano's Axiom）。第 8-9 課主要解釋加法的定義。第 10 課主題是乘法的定義，而進一步延伸的，是第 11 課的基底以及位置記數法。第 12 課主題是遞迴原理（recursion theorem），其中作者也特別說明它與相關定義法（method of definition）之連結。在第 14 課中，作者介紹五個算術定律：結合律、交換律、（乘法對加法的）分配律、三一律以及消去律，並且預示運算決定了數系結構之事實。在第 15 課中，作者說明數學歸納法原理（principle of mathematical induction）與良序原理（well-ordering principle）之關連。

限於篇幅，我上述這些流水帳式的簡介，看來相當「枯燥乏味」，儘管原書中還是有許多頗為精巧的論證。無論如何，作者顯然覺得此時必須來個「中場休息」，這應該是他在第 16 課介紹偉大女數學家索菲雅·卡巴列夫斯基 (Sofya Kavalevskaya) 的故事，「不妨體會一下它們隱藏的熱情，以及它們引發的戲劇性事件」。

在第 17 課中，作者演示數學歸納法，以證明加法的結合律。第 18 課介紹 0 與負數，其中罕見地提及負數在複式簿記制度中相當好用。第 19 課主題是整數系。在第 20 課中，作者引述新代數作為一種符號的科學 (science of signs)，以及偉大 (女) 數學家諾特 (Emmy Noether) 對現代抽象代數的偉大貢獻。由於諾特的貢獻之一是環 (ring)，因此，作者緊接著在第 21 課中，介紹此一抽象代數之結構。然後，在此一關連中，作者在下一章 (第 22 章) 提供「負負得正」之證明。在第 23 課中，作者從《萊茵德紙草書》談到方程式求解，最終目的是討論多項式 (可構成一個環) 的角色。第 24 課主題是除法與分數，並進一步討論分數與小數的表徵形式。第 25 課的主題是數體 (number field)，作者引進這些抽象結構，完全基於它們的圓滿自足：「體的定義……本身告訴我們，數學和超基礎數學需要人類投注所有心力，創造抽象概念，同時相信這些概念。」最後，在結語中，作者引用《蘇丹在後宮》這一幅畫，來強調數學的本質是關乎「自然生成與人為創造的兩種事物，和諧地彼此共存」。

就訴求目標讀者來說，本書可以跟《社會組也學得好的數學十堂課》(傑瑞·金著，商周出版，2010) 做一個對比。後者顯然針對非科學主修大學生的數學通識課程。作者傑瑞·金 (Jerry King) 使用了數學 vs. 詩篇的類比，強調即使是人文社會科學主修的學生，也可以學好數學。如果一般人可以被詩篇所感動，那麼，他們又何嘗無緣參與數學知識活動呢？傑瑞·金認為基本的邏輯推理訓練、集合論、從自然數經整數、有理數、實數到複數的數系發展、數論、函數 (含解析幾何)、機率論以及微積分等等，都是不可或缺的主題。同時，他又高度重視數學知識的結構面向，譬如從自然數系到微積分的縱深統整論述，就明確地演示數學的意義與價值不僅在於它的廣泛應用，而且也關乎它自身的真與美。

相對而言，本書也極端重視論證，不過，作者在求「真」方面顯得更加堅持，為此，他認為應該深入公理系統的設置底層，探索比如算術加法與乘法的結合律 (associative law) 與遞迴 (recursion) 的本質關係。另一方面，他的「求真」也相當「純粹」，比如當他運用一列骨牌比喻數學歸納法：「若 (if) 第一張骨牌倒下，且若 (if) 推倒任何一張骨牌即可再 (then) 推倒下一張，則 (then) 所有骨牌一定會倒。」緊接著，他表達了「以物理方式類比數學運算時的必然限制」：「我經常想，這個說法 (按即骨牌比喻) 在物理學上是否成立。動量在骨牌長龍

中傳遞，意味著骨牌可能會持續倒下，但動量在骨牌常龍中會逐漸衰減，意味著骨牌長龍延伸到外太空時，它呈現的波浪會逐漸減慢，最終會停頓下來，直到很多很多骨牌直立者。」還有，基於這種比喻，本書內容幾乎不涉及數學應用例證，一點都不令人感到意外。

上述有關本書這些風貌，都可以解釋作者的敘事手法。由於本書強調數學基礎之論證，因此，在考量到讀者的耐心時，他隨時地「岔入」數學或數學家的故事。在本書中，作者所介紹的數學家（從古代到 20 世紀中期）就將近 20 位之多，而且大都簡述他（她）們的故事傳奇。此外，他也經常引述一些文學作品，以便「淡定」陷入基礎深淵的數學熱情。

總之，這是一本相當另類的數學普及小品。一般讀者初次接觸本書不免覺得論證「超量」，但平心而論，讀者若懷抱一點點耐心，順著這些材料讀下去，也並非難以理解。數學知識中有許多基本但極為深刻的內容，譬如自然數如何定義？中學階段所學習的數學歸納法有何意義？所謂的遞迴定理與我們所理解的數學基本概念又有何關連？還有，數學運算如何決定結構？等等，都在本書中有了簡易可及的切入點。無論如何，本書的訴求呼應了通識教育中非常古典的心智訓練，讀者若有機會隨性地讀個幾章（順序無妨），一定可以變得比較博雅才是。至於中小學數學教師呢，本書至少可以提醒：那五個算術定律為何那麼重要了。

最後，我們必須指出本書的一些謬誤與商榷，供讀者參考。

有關基數（cardinal number）問題。頁 12 提及「沒有自然數，我們無法計數，也無法回答『有多少？』這個問題。」這一句論斷值得商榷，因為在「數不過三」（亦即：只能數一、二、很多很多）的民族部落中，還是有能力運用一一對應關係（one-to-one correspondence），確認他的二十頭羊是否走失。

頁 141：有關骨牌比喻數學歸納法之說明中，「直到僅餘一個骨牌直立著」應該修訂為「直到還有很多很多張骨牌直立著」，才比較「正確」與達意。

在頁 185，作者提及群論（group theory）是在伽羅瓦決鬥身亡前一天晚上寫成的作品中達到完備。又，在頁 224，作者再次強調：「在決鬥身亡的前一天晚上，二十四歲的伽羅瓦盡情發揮才能，重新檢視多項（式）方程式的根，首先發現了對稱限制系統，這個系統將可決定哪些方程式可解、哪些又不可解。」有關此一敘事不符合史實，數學史家早已貼心糾正，可惜，作者可能還是參考始作俑者的 E. T. Bell 的《大數學家》（*Men of Mathematics*）。事實上，在決鬥前夕，伽羅瓦寫信給他的好友，交代後者要幫忙珍惜他自認為畢生最偉大的數學貢獻，而那是他已發表的論文結果，因為他說：「我的命運已經無法讓祖國及時認識我的貢獻」。