

教育街上名人的數學小書

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授



當你翻開本書目錄時，先猜想一下本書第 IX、X 章標題何以分別稱之為「締結良緣」與「貴子早生」？哈佛大學傑出數學家貝利·馬祖爾（Barry Mazur）說：「這是李伯一家邀請我們參加代數和幾何的婚宴」。事實上，這一對在十七世紀所組成的數學新家庭，就叫做「解析幾何」（analytic geometry），至於他們早生的貴子，當然就是第 X 章的主題「微積分」（calculus）了。

上述這個充滿數學史洞識的的比喻，可以見證本書作者李伯一家人的博雅素養，以及非常樂觀的自由主義思想，儘管當時二戰正酣，時局嚴酷與險惡。馬祖爾指出：

進入這本書的世界，就有如發現一個充滿希望的地方，裡面的想法 — 純粹的想法 — 正在被雨水閃耀地沖刷。而且，它們就像向日葵一樣，很快就會將自己的嶄新花瓣展現給你，充滿了各種可能、令人喜悅以及有用之處。

當然，這是因為「作者們有那個天分，可以真正寫出一本給所有人看的數學書。」

事實上，本書是數學家莉莉安·李伯（Lillian Lieber, 1886-1986）教授於 1944 年，為二戰出征的美國大兵所寫的一本數學休閒小書。全書才大約三萬字，為了方便閱讀，還採用一行一詞句的方式書寫，再加上作者先生休·李伯（Hugh Gray Lieber）的俏皮貼切插畫，使得本書洋溢著極大的啟發性。無怪乎馬祖爾教授還特別強調：

這本小書所帶來的興奮感，剛好和它的大小成反比。這本書的重量，比如說，相較於當代微積分教科書（有時候，我很好奇搬著它們到處跑的學生，為什麼沒有額外的體育課學分），真是有相當大的對比。不知道是出自懶惰還是有一般的躁動靈魂，當我還是青少年的時候，我很喜歡那些去除噱頭，旨在寫出主題本質的並帶點叛逆性的輕薄小書。

可見，本書所以受到馬祖爾的青睞，完全是因為這一位傑出數學家的十二歲年代，受到它直指核心且「帶點叛逆性」的風格所吸引。而這種「現代性」（modernity），當然也見證了美國數學家養成教育制度的逐漸成熟，以及許多美國在二十世紀早期本土培養的數學博士，如何地以數學教育與普及為職志。

根據約瑟夫·雅伯（Joseph Alper）的說明，¹莉莉安·羅森諾夫（Lillian Rosanoff）是生於俄羅斯的猶太人家庭，後來隨家人移民美國。她先後取得紐約的 Barnard 學院學士、哥倫比亞大學碩士，1914 年，她從 Clark 大學榮獲博士學位。1934 年，當她應聘到紐約長島大學數學系任教時，與當時的系主任休·李伯結為連理。1945 年，當修·李伯轉任該校藝術系主任時，莉莉安繼任數學系主任，直到 1954 年退休為止。

顯然基於數學普及的崇高理想（她的科普系列書籍至少有十本之多），莉莉安希望利用科普書寫，讓年輕人理解數學與科學在政治與倫理等方面的蘊涵。另一方面，她也注意到一般學生直到大學階段，才有機會接觸源自十九世紀的現代數學。因此，為了讓學生體會數學知識活動的令人興奮，她認為有必要引進伽羅瓦群（Galois group）、非歐幾何、四維空間乃至於現代邏輯等等那些革命性的風貌。而所有這些，都在本書中有了相當具體的實現。

本書除了〈前言〉（馬祖爾）、〈序言〉、〈介紹男主角〉以及書末的〈寓意〉之外，共有二十章，其中所介紹數學主題，涵蓋了歐氏幾何、非歐幾何、有限幾何、有限代數、解析幾何、微積分、第四維空間以及相對論等等，並及於方法論之省思，以及現代數學 vs. 現代藝術的抽象性之對比。各章篇幅精簡、內容強悍，但是，呈現手法卻十分輕鬆俏皮，尤其是各章標題，更是時有佳作，除了前述的第 IX 章〈締結良緣〉（a wedding）、第 X 章〈貴子早生〉（the offspring）之外，

¹ Joseph S. Alper, "Lillian R. Lieber", *Jewish Women's Archive*。2012-03-16 取用。

還有分別介紹非歐幾何的第 XIV 章〈自由與特許〉，以及有限幾何的第 XV 章的〈傲慢與偏見〉。所有這些，都是由於莉莉安認為所謂的 SAM (science, art and mathematics) 表現了人類文化的(良)善、真(實)與美(妙)，從而對年輕讀者娓娓道來，說明現代數學的理論、啟示及其令人震懾的興奮效果，是現代教育乃至於數學普及著述必須承擔的時代使命。

儘管如此，李伯夫婦非常「到位」的科普素養，足以在本書一開始，就能讓年輕讀者愛不釋手。譬如說吧，在第 I 章中，作者就提醒我們「五千萬人也可能是錯的」，他們經由一個簡單的計算題，告訴我們「別成為倉促做決定的人」。其次，在第 II 章中，作者提出加倍疊紙巾（每張厚度 0.003 吋）的問題，然後要讀者猜測疊到第 32 次時，總共疊成的紙巾大約有多高？作者利用這個例子，說明很多時候我們依賴直覺解決問題固然無可或非，然而，直覺的東西在被檢查和複檢之前，「並不會成為值得尊敬的科學和數學」，儘管她十分仰慕法拉第 (Faraday) 緣起於直覺的許多貢獻。至於在第 III 章中，作者則拋出另一個問題：已知有一條鋼環緊緊的環繞著地球的赤道。現在你將它移走，並在一處將它切開，然後接合一段額外 10 呎長的部分。在這鋼環和地球之間究竟產生多大的空間呢？針對它那令人出乎意料的解答，作者提醒我們：沒有理論或計畫，光是機械式的操作，這個問題裡面的數字，並不因為你使用算術，就會讓它變得有意義！

以上所提及問題都常見於數學普及書籍。作者在此「老生常談」，其目的就是希望我們都能運用數學來效化 (streamline) 心靈。為此，當我們學習數學時，就必須強調一般化、抽象化以及精確定義的重要性，進而位於作者所謂的五層「圖騰柱」頂層的純數學思維，當然就至為重要了。作者以收音機為例，說明這個發明如何先後受惠於義大利馬可尼 (Marconi) 的無線電設備、德國赫茲 (Hertz) 的電磁波實驗、英國馬克斯威爾 (Maxwell) 的電磁學理論，乃至於最後，牛頓微積分如何被應用到電磁的微分方程式上。因此，要是沒有純粹的數學理論，哪來科技上的重要發明？

當然，從本書的說明，我們也可以看到數學不只是給工程師，或是需要數學公式的人使用而已，「數學是一種思維方式，一種生活方式」，才是作者所念茲在茲的理念。因此，在第 XI 章「本書上半總結」最後，作者特別指出：「大部分數學課程都沒有留下時間讓你考慮上面那些事情。時間都用來學習演算技術。我們必須要停下來，然後從技術的操弄中，看出可以從中得到哪些一般觀念。而這些一般觀念是對我們所有人都管用的」。

作者這種針對比較結構主義式進路 (structuralistic approach) 的「新式教育」之呼籲，在本書後半部提供了一個教育現代數學 (modern mathematics) 的

藍圖。至於其具體內容，則是基於隨意定奪的假設、但卻邏輯相容（consistent）的公設數學如非歐幾何、有限幾何、有限代數、第四維空間等等。如此一來，受過這種現代數學訓練的公民，「對於自由終止於何處，以及特許（license）始於何處，有一個非常清楚的體認：他非常瞭解到他不能在一個系統中引進任何事物，使得矛盾發生，而摧毀這個系統本身。」因此，基於這樣的自由主義之倫理蘊含，「即使在一個民主制度中，允許民主的敵人使用言論自由去摧毀民主，是不合乎邏輯的。同理，自由企業也必須因著民主的其它設準而有所規範。」

上述作者所關心的這種自由 vs. 特許的張力，在現代藝術與音樂等等的創造上，倒是沒有什麼禁忌，因為它的奇特性正是現代主義（modernism）的一個特徵。所以，讀者「將不會驚訝地發現到現代藝術比起過氣的時尚藝術，擁有還要無限多的品類，就好比今日數學擁有比過去一直有的還要無限多的品類」。

無論作者基於現代數學精神的自由主義倫理主張是否具有說服力，本書的精緻內容與圖文並茂的表現形式，都值得我們細心品味。總之，這一本年齡即將邁入七十歲的阿嬤級讀物，既是數學普及書寫的一絕，也是數學知識永恆性的一個見證。因此，我們非常樂意中譯並介紹給中文讀者，特別是中學師生閱讀。