

數學成熟度的指標：哥德爾不完備定理

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

書名：數學女孩：哥德爾不完備定理

作者：結城浩

出版社：世茂出版社，新北市

出版資料：平裝本，pp. xviii+377

出版年：2012

ISBN: 978-986-6097-41-6

關鍵詞：哥德爾不完備定理、數理邏輯、皮亞諾公設、對角線論證法



本書是結城浩《數學女孩》三部曲中的最後一部，主題是哥德爾不完備定理。儘管這個定理完成於二十世紀上半葉的 1931 年，但卻是數理邏輯學（mathematical logic）與數學基礎（foundations of mathematics）研究的封頂之作。

在《數學女孩》的第一部曲（台譯書名「數學少女」）中，作者將基本且深刻的數學知識，簡化到一般高中生可以理解的程度，足以顯示他不只受過非常嚴格的數學訓練，因而對於數學思維的掌握非常得心應手，同時，也對如何普及他的數學經驗深具信心。不過，更值得注意的，正如結城浩在《數學女孩：費馬最後定理》（第二部曲）所呈現，他總是適時地從高觀點來歸納或提示一些數學（抽

象)結構,讓讀者不至於迷失在徒然解題的迷魂陣中,而無法自拔。此外,他在這三部曲的「旅行地圖」中所進行的連結與對比,也一再地提醒我們數學是一個「有機的整體」,因此,數學史上的一些重大突破,往往需要「跨界」的思維。

另一方面,從小說敘事的觀點來看,作者在這三部曲所採取的「比喻」,都是高中男生對於數學世界 vs. 感情世界的一種未來憧憬:「我對數學的『憧憬』— 和男孩對女孩抱持的情感在某些地方有點相似」。因此,在本書中,數學作為一種文學比喻就出現了另類風貌,值得數學小說的愛好者特別注意。

現在,我們針對這三部曲所處理的主題,提供一點簡要的說明,俾便讀者閱讀時有所參考與借鑒。《數學少女》的主題是生成函數,作者的連結與跨界分享,相當令人感動:「我和米爾迦使用生成函數求得斐波那契數列一般項,就像原本捧在手上快要散落的數列,被名為生成函數的一條線串起來,那真是一次難以言喻的經驗。」此外,他還利用生成函數處理褶積與分拆數等問題,甚至還提及黎曼 ζ 函數,尤其是 $\zeta(2)$ 與歐拉發現平方倒數無窮和之公式的關係。在該書中,生成函數是一種概念工具,它大大地有助於我們解決許多數學問題,離散型或連續型都包括在內。

這種主題式的敘事,到了《數學女孩:費馬最後定理》與《數學女孩:哥德爾不完備定理》,就變成了偉大的定理。顧名思義,《數學女孩:費馬最後定理》的主題就是費馬最後定理。作者在該書中,為了讓讀者多少掌握有關此一偉大證明的輪廓,特別提供了一個概略的說明。基於此,他還進一步介紹橢圓函數、模曲線與自守形式。最後,懷爾斯(Andrew Wiles)在橢圓曲線與自守形式之間成功地搭起一座橋樑,而完成了費馬最後定理的證明。由於這些相關數學知識都極其抽象,一般讀者難以「一睹芳澤」,因此,作者的「旅行地圖」仿效類似網路「超連結」資訊的手法,鼓勵讀者進行形式推論,即使無從理解個別命題(或定理)之內容為何。而這,當然也呼應了這三部曲所強調的數學知識的結構面向(structural aspects)意義。

顯然,在第二部曲中,結城浩無法邀請(也不期待!)讀者參與費馬最後定理的證明過程,這一形同登天的任務,當然受限於目前數學教育與普及水準的力有未逮。相形之下,在這三部曲的終曲中,結城浩的野心卻是哥德爾不完備定理之解說。這個普及的願景並非不可企及,因為作者所訴求的正是讀者的數學成熟度。這種成熟度與高等數學的背景知識並不具有必然關係,因此,集合論、數理邏輯以及數學基礎等數學分支之學習,通常只要預設高中數學背景知識即可。事實上,這幾門學問在二十世紀下半葉,也一直吸引英美兩國哲學家的興趣。基於此一考量,在本書中,作者就使盡了渾身解數,希望讀者分享他對不完備定理的理解。

總之，不完備定理之證明所涉及的形式系統（**formal system**）之相容與不完備之相關固然有其難度，但是，對於充滿好奇心的讀者來說，這卻是可以親近的一個智力遊戲或挑戰。任何人（無論有無高等數學之經驗）想要測試數學思維的成熟度，本書的形式證明正是最好的指標。更何況，如果不深入探討此一定理，那麼，物理學家歐本海默（**Robert Oppenheimer**）如何稱頌不完備定理為「理性的極限」，我們大概就不知從何說起了。