

# 數學知識的本質：發現 vs.發明

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

書名：Is God a Mathematicians?

作者：Mario Livio

出版者：Simon & Schuster, New York

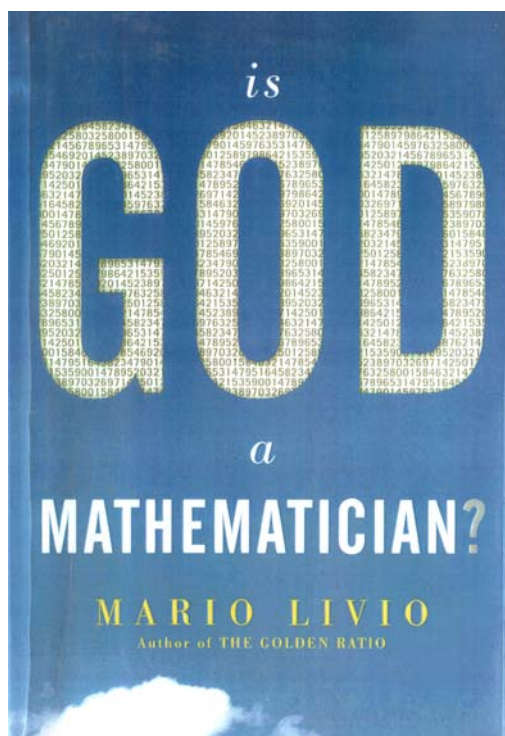
出版日期：2009

頁數：x+308 頁，平裝

ISBN-13：978-0-7432-9405-8; ISBN-10 0-7432-9405-X

關鍵詞：數學知識本質、數學家、發現、發明、柏拉圖主義、上帝、不合理的有效性

Keywords: nature of mathematical knowledge. Mathematician, discovery, invention, Platonism, God, unreasonable effectiveness .



本書書名雖然是「上帝是數學家嗎？」但是，其核心問題卻是數學知識本質為何：數學知識究竟是被發現的？還是被發明或被創造的？作者馬里歐·李維歐利用本書八章（第 2-9 章）的篇幅，說明此一提問在西方科學史/數學史脈絡中的意義，最後，在第九章（本書最後一章）總結他自己的一家之言。

馬里歐·李維歐 (Mario Livio) 是一位資深的太空物理科學家，對於科普寫作也不遺餘力，他在台灣出版的中譯作品有《黃金比例：1.61803...的秘密》和《無解的方程式：數學天才與對稱性的鬥智之旅》，都頗受歡迎，可見他的敘事相當得心應手。事實上，在本書中，作者的書寫也是敘事 (narrative) 多於論述 (discourse)，因此，從數學史實或科學史實舉例比喻，顯然就是他的主要進路了。當然，由於西方科/數學發展無法切割它們與哲學、宗教的對話，所以，他盡可能通過原始文獻 (primary sources) 說明畢達哥拉斯的命數論 (numerology) 與柏拉圖數學哲學，乃至十七世紀的科學 vs. 宗教議題，特別是十七世紀伽利略與笛卡兒的案例，也不令我們感到意外。這種在歷史文化脈絡中尋求數學與科學發展的價值與意義之進路，對於他的科普敘事，的確是一大利多，值得科普寫作者省思與借鏡。

數學知識的永恆性之觀點始自古希臘的畢達哥拉斯，後來經由柏拉圖的系統論述而底定。在十七世紀，這種觀點隨著科學革命的巨大成就，而成為西方世界的主流思想，譬如伽利略、克卜勒與牛頓在天文與物理方面的貢獻，就是最好的見證。為了對抗基督教的宗教權威，「上帝是數學家」的說法逐漸在此時成為科學家的護身符。到了十八世紀，西方數學家為了擴充數學的威力，將其應用範圍從已經大力開拓的自然界轉向人文世界，於是，機率論與統計學遂應運而生。現在，數學 (特別是微積分) 竟連不確定的人文社會現象，似乎都可以放手處理了。

這種理性時代 (Age of Reason) 的樂觀，似乎在十九世紀非歐幾何 (non-Euclidean geometry) 問世之後，遭遇了前所未有的挑戰。不過，數學家面對這種全新的、且與歐氏幾何相對一致 (relative consistent) 的幾何系統，他們所修正的，卻是有關幾何真理 (geometric truth) 的更基進概念，亦即，正如集合論的締造者康托爾 (Georg Cantor) 所指出：數學的本質在於它的完全自由，不需要與自然世界建立任何的對應關係。不過，呼應柏拉圖主義，數學家相信「數學是一個獨立的真理世界，它的存在與物理宇宙的存在同樣真實」。

無論如何，由於新的數學知識系統都涉及邏輯一致性 (consistency) 問題，因此，數學與邏輯成了無法切斷的臍帶。在本書第七章，作者追溯邏輯的發展史，止於哥德爾 (Kurt Godel) 不完備定理 (incompleteness theorem) 的劃時代意義。現在，如果所有存在的數學都是不完備的形式 (主義) 遊戲 (formalistic game)，那麼，以這種「靠不住」的系統為模型，我們又如何期待它引導出有關宇宙及其運作的深刻見解呢，從而發揮它的「不合理的有效性」 (unreasonable effectiveness) ？

數學何以擁有這麼多非常成功的「不合理的有效性」 (unreasonable effectiveness) ？這是本書第八章的主題，也是無論主張數學是被發現的還是人

類所創造的，都必須面對的議題。作者特別以結理論（knot theory）為例，指出在 1860 年湯姆森（William Thomson，即凱爾文爵士 Lord Kelvin, 1824-1907）之後，有關結的研究原來已經不具有實用意義，然而，在 1970 年代之後，物理學家發現弦理論（一種萬有理論 theory of everything）和結理論可以和諧共生。一方面，弦（string）理論得益於結（knot）理論的研究成果，另一方面，弦理論也啟示了結理論的新見解。因此，結理論的故事，又再一次漂亮地證明了數學出人意表的力量。

結理論的研究大大地受惠於十九世紀英國物理學家湯姆森的原子模型之研究。根據湯姆森的想像與推論，原子是「打了結的」以太之管子，如此，自然界所以會出現各種化學元素，正是因為有各色各樣的結的緣故。針對這段科學史插曲，作者提供十分深刻的評論：

如果湯姆森的猜測在今天聽來頗為瘋狂，那只是因為我們有一整個世紀習慣和實驗性地測試正確的原子模型 — 電子繞著原子核旋轉。但當時是一八六〇年的英格蘭，而湯姆森為繁複煙環的穩定性和振動能力深深打動 — 這兩種特性在當時被認為是塑造原子模型不可或缺之物。為發展與元素週期表等價的結，湯姆森必須將結分類 — 找出可能有哪些不同的結，而這正是這種將繩結分類的需求，激發了世人對繩結數學的強烈興趣。

換言之，這是一個後來被淘汰的科學假說如何引導數學研究的一個極為有趣的歷史案例。正如前述，自然科學理論會被汰舊更新，亦即，自然科學的進展出自它的革命（revolution），然而，數學理論卻可永恆不朽。

這種不朽性（eternity）即使在數學不是先驗（*a priori*）存在，而是被創造時，仍然可以成立。這種情況不只適用於人類世界，如果深海水母也有智慧，那麼，正如作者引述二十世紀偉大數學家艾提雅（Michael Atiyah）所比喻的「水母數學」，也一定可以在水母世界不朽才是：

讓我們想像那種〔可以數數的〕智慧並非存在於人類，而是在某隻離群索居，深埋於太平洋深淵的巨大水母身上。除了周遭的水，沒有個別物體的體驗。運動、溫度和壓力為它提供基本感知資料。在這麼一個純連續統（continuum）中，離散不會發生，也就沒有東西可以數了。

顯然，艾提亞的觀點呼應了認知科學家有關人類大腦演化的看法：「如果我們觀察大腦的演化脈絡，那麼數學在物理科學的神秘成就，就至少有一部份可以說明了。大腦演化是為了處理物理世界，因此為達成這個目的而發展出數學這種語言，應不是太驚人之事。」更甚者，此一觀點也批判了數學哲學的柏拉圖主義

(Platonism)：數學是存在於我們之外的客觀真理 (objective truth)。在這一點上，作者提供了非常簡單但精彩的論述。他以哥德巴赫猜想 (Goldbach's conjecture) 與卡塔朗猜想 (Catalan's conjecture) 為例，說明數學是一種客觀真理的難題之一。如果前一猜想可以在 2016 年前解決，那麼，我們是否可以說那個命題在笛卡兒率先想到時就真實了？

這樣的詰問當然有一點過分刁難。不過，請再看卡塔朗猜想。這個在 1844 年由比利時數學家卡塔朗所提出來的猜測，早在 1342 年就曾引起數學家李維·班·吉爾森 (Levi Ben Gerson) 的注意，並且提供了部分解答。同樣地，在 1976 年，數學家羅伯特·提得曼 (Robert Tijdeman) 也邁進了的一步。最後，在 2002 年，由羅馬尼亞數學家普瑞達·米哈雷斯庫 (Preda Mihailescu) 完成證明，並在 2004 年獲得確認。如此一來，卡塔朗猜想是什麼時候便正確的？是 1342 年？1844 年？1976 年？2002 年？還是 2004 年？「難道那句敘述 (按：指卡塔朗猜想) 不是恆為真，只是我們先前不知道而已？」

顯然基於數學與自然科學的不可須臾分離，作者也在多處場合強調科學家的數學素養之不可或缺。比如說吧，牛頓同時代的胡克 (Robert Hooke, 1635-1703) 儘管已經察覺到平方反比定律的重要性，但是，由於他無法以數學的語言闡述他的理念，以致於讓牛頓獨占鰲頭，而發現不朽的萬有引力定律。事實上，這個定律必須「連結」克卜勒三大行星定律，才能真正成為名符其實的「萬有」

(universal)。正如牛頓自己所說的，在 1666 年，「我開始想像將重力延伸至月球軌道，也找出如何評估環繞甲星球運轉的乙星球，會對甲星球表面施加多大的力量，我從克卜勒的『行星軌道週期的平方與其距軌道中心的立方成正比』的定律推斷，使行星繞既定軌道運行的力，必定與它們和軌道中心距離平方成反比：依此我比較了使用月球繞其軌道的力量，與地球表面的重力，結果發現答案相當接近。」

最後，我們也必須稍加評論本書有關數學史本身的一些論述，尤其是三位最偉大數學家的提法。阿基米德、牛頓與高斯誠然是最偉大級的數學家，甚至他們的進路之神奇堪稱魔術師而無愧。同時，他們的成就也不僅限於數學方面。不過，除了他們三位之外，至少還有歐拉 (Euler) 可以相提並論。其實，目前數學通史論述早已超越這種過度簡化歷史的說法，只是一般科普書籍仍然喜歡「三大」或「幾大」提法，我們也就不必過分在意了。儘管如此，作者對於本書所提及之主要人物之行止與著述，都有相當深入的說明，其特點則是從他的充分引述原始文獻可以看得出來，譬如說吧，他尋求參訪「阿基米德失落羊皮書」的報導，就不只是出自博雅的動機而已。當然，在許多敘事的細微之處，比方說，牛頓自認為「站在巨人的肩上」，是不是針對胡克的挑戰而意有所指，作者也多方援引，足見他對於現代科學史家的相關論述，花了相當的時間與心力，這些都可以見證

他的忠於科普敘事之品質。

總之，無論數學知識是被發現的、被發明的，或是如同本書作者所主張的，是被發現＋被發明的，都可以部份說明數學在實用上這種「不合理的有效性」。基於多重宇宙的假說，也許數學不是只有一種，不過，如果人類或水母的心智都是上帝的創造物，那麼，針對（多重）宇宙的現象之說明，上帝是數學家就是一個十分簡單、但卻強而有力的比喻了。

附記：這是為了本書中譯版（即將由繁星多媒體股份有限公司出版）而寫的推薦文。