

數學與敘事的完美結合：鄭重推薦《學微積分，也學人生》

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

書名：學微積分，也學人生（*The Calculus of Friendship: What a Teacher and a Student Learned about Life While Corresponding about Math*）

作者：史蒂芬·史特格茲（Steven Strogatz）

譯者序：蔡承志教授

導讀序：游森棚教授

推薦序：張海潮教授

出版社：遠流出版公司，台北市

出版資料：平裝，238 頁

出版年：2011

關鍵詞：美國科普、個人化書寫、微積分、費波納西數列、不可公度量



一、前言

一本數學普及書籍在書末總整理所論及之數學問題？怎麼會呢？不過，史蒂芬·史特格茲卻在本書最後，「為數學老師、學生以及對數學特別有興趣的人準備了一份清單，列出本書所討論的問題」。至於其單元，則包括有幾何、三角函數、機率與離散數學、微積分、微分方程、傅立葉級數、複變（數）函數、漸近線（逼近）方法，以及變分法（微積分）。而且，其相關內容也相當深入，絕對不是「隨便」選修微積分的讀者，就可以輕易理解。可見，本書英文版書銜中的 calculus (of friendship)，絕對不僅止於「微積分」，更多的，作者顯然利用這種

雙關語，來比喻師生情誼的數不盡點滴！請參看作者如下的自白：

微積分是研究改變（change）的一門數學。它原本的名字「流動」（fluxion）將微積分的精神掌握得最好。這名字是微積分的發明者牛頓所取的，它會讓人聯想到一個持續在運動、不斷在開展的系統。

就像微積分本身一樣，這本書也是對於改變的一種探索。它探索的是發生在一個學生內心世界的轉變，30年間，他和他的老師角色互換，他們的年紀一起增長年紀一起增長，同時各自遭逢人生帶給他們的種種打擊。但在經歷種種改變的過程中，他們因一份對微積分的熱愛而綁在一起。對他們來說，微積分不僅僅是一門科學，也是他們喜歡一起玩的一種遊戲（男人之間友誼的基礎經常就是這類東西），那是當他們周遭事物持續在流動時維持不變的東西。

因此，儘管作者在本書中「暢談」數學，一點都不打算放棄「數學品味」，本書還是值得大力推薦給一般讀者！究其主因，我想作者的個人化「數學經驗」（mathematical experience）的書寫風格，就是它的最大賣點。我們從本書的閱讀中，的確很容易分享作者的困而學之、生涯挫折以及緬懷師恩的至情至性等等。所有這些，都將作者這一位頂尖的應用數學家還原成為鄰家叔叔，從而引發一般讀者的同理心。

本書是史特格茲（Steven Strogatz, 1959-）利用他與高中老師唐恩·喬弗瑞（Don Joffray）（暱稱喬夫）之通信，回憶師生三十年師生情誼的動人故事。這一段歷史重建，對他自己帶來極大的滿足（引自本書最後一章）：

在寫這本書的過程中我一直在想，我到底從喬夫那裡學到些什麼。這麼多年來，我的回答大概都是：沒多少東西；意思是，我從沒從他那裡學到多少數學。這是真的，即便是我讀高中的階段。但是現在，我開始能體會他給了我些什麼。

他讓我可以教他。

在我還沒有任何學生之前，他就是我的學生。

他似乎知道這正是我最需要的。而他給我機會、鼓勵我，並且幫助我，就像所有偉大的教師所做的那樣。

然而現在我還看出我確實從他那裡學到某些東西，某些有深刻數學內涵的事情：關於如何過人生。無論是從事他最喜歡的休閒活動或面對人生的起伏，喬夫都表現得像個勇者，無懼於改變。他會與波浪一起翻滾，並嘗試與它和平相處。在他能力所及範圍之內，他甚至會和它玩起遊戲。爵士鋼琴、衝浪、激流方舟，這些活動都需要在「勢必發生」與「無法預測」之間取得平衡，而這兩者正是事物改變的兩個面向。有次（秩）序的及混沌的。微積

分所能馴服的改變（變化），以及它所無法馴服的改變（變化）。他選擇正面去面對這一切：不只用心智（mind）去面對它們（像季諾那樣），也用他的心（heart）去面對。

上述引文中的中譯名詞「次序」（order）與「改變」（change），我比較喜歡（依序）譯成「秩序」與「變化」。不過，這兩個對立的語詞出現在同一段文字中，一方面作者用以描繪喬夫老師一生的勇於探索，另一方面，也連結到他自己並非全然一帆風順的學術事業與家庭生活。從書寫風格來說，這種對比手法相當高明，足見作者不僅數學功力一把罩，寫作能力亦非一般作者可以相提並論。

本書作者史蒂芬·史特格茲是康乃爾大學應用數學系講座教授，專長是動態系統與複雜網路理論。1998年，他與 Duncan Watts 共同在《自然》（*Nature*）上發表“Collective dynamics of small-world networks”，成為該領域的經典論文。目前，他每週為《紐約時報》（*The New York Times*）撰寫科普專欄。一貫地，他總是現身說法，深入淺出，因此，這一專欄吸引了許多讀者，尤其被推薦為企業家與 CEO 的必讀文章。

二、內容簡介

正如蔡承志教授在他譯序〈微積分中的人生意義〉所指出：「史特格茲無意將友誼或人生看成一個微積分問題去做精確的分析；相反地，他選擇利用微積分中的一些基礎概念（連續、追逐、相對、無理、隨機、無限、混沌、下坡、分歧等）來隱喻或明喻真實人生。」事實上，本書除了書末的〈延伸閱讀〉、〈參考文獻〉與前述的〈數學問題總整理〉之外，依作者與喬夫老師的通信時間順序，目錄如下（原書各章未編號次）：

1. 連續性（1974-75）
2. 追逐（1976）
3. 相對論（1977）
4. 無理數（1978-79）
5. 移位（1980-89）
6. 餐墊紙上的證明（1989.3）
7. 和尚和山（1989-1990）
8. 隨機（1990-91）
9. 無限與極限（1991）
10. 混沌（1992-95）
11. 慶祝（1996-99）
12. 最快走下坡之路（2000-03）
13. 分歧（2004）

14. 海龍公式（2005-目前）

一開始，作者就強調「連續性」對函數的重要性：「微積分之所以成功，關鍵就在於『連續性』（continuity）這個概念。它的核心假設是：事物是平順地在改變，所以每樣事物與片刻之前的它只有無限微小的差別。」「事實證明，這種理解『改變』的方式帶出來的威力是言語難以形容的：它可能是人類曾有過的最偉大想法。微積分能讓我們登陸月球、以光速傳遞訊息、建造橋樑來橫跨寬達數公里的河流，甚至幫助人類限制流行病的擴散。簡言之，沒有微積分的話，就沒有現代化的生活。」

基於此一特性，微積分不僅可以幫助我們「預測未來」，同時也可以「重建過去」，儘管不連續點（points of discontinuity）在所難免。作者利用這些數學知識的特性，來說明他與喬夫老師通信的不連續性，對於他打算重建三十年如一日的師生情誼，所可能帶來的極限。其實，作者在1974年就學盧密斯中學（康乃狄克州一所明星高中）高一時，即選修「微積分先修班」，授課老師並非喬夫，而是一位剛從MIT畢業的教師強森，上課時就預告他們一定無法理解有關連續函數的 $\varepsilon - \delta$ 定義：

函數 f 在點 x 為連續的條件是：對任何 $\varepsilon > 0$ 而言，存在一個 $\delta > 0$ ，使得若 $|x - y| < \delta$ ，則 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ 。

後來，他們聽說喬夫老師在他班上用很一樣的方法來介紹連續性：「他甚至完全不解釋 ε 與 δ 是怎麼一回事。他把連續函數定義成：鉛筆不需離開紙面就能將函數圖形畫出來的那種函數。」

事實上，喬夫老師的上課模式大概如下：先提出一個問題，態度輕鬆，不給學生壓力，然後走下講台。通常是班·范恩和作者在較勁看誰能解出。這種方式不循傳統，而且，喬夫老師經常問一些古怪但有趣的問題，譬如被人用長繩索拴住的山羊，如果繃緊繩子企圖離開那棵樹，那麼，它就會像一道漩渦愈走愈靠近那棵樹。最後，他希望學生寫出山羊所走的漩渦狀軌跡方程式。

作者利用這個插曲，來比喻他與喬夫老師的師生關係：「隨著時間的進展，我現在知道自己就像那隻被人用繩子繫在樹幹上的山羊，而喬弗瑞就是那棵樹。這些年來，我拉緊繩子想離開他，反倒讓自己愈繞圈愈靠近他。」事實上，這個追逐的主題在下兩章繼續出現，可見作者應該非常著迷才是。

作者如此「心繫」喬夫老師，顯然還有另一個原因，那是因為喬夫老師偶爾上課到一半的時候，會岔開話題，開始分享他的得意門生的豐功偉業，譬如傑米·

威廉斯曾經寫出費伯納西數列（Fibonacci sequence）的一般項：

$$F(n) = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}。$$

在第 2 章〈追逐〉（1976）中，作者延續追逐問題的討論，當年他念高二，已經修完學校的所有數學課，每天花時間自修多變數微積分。由於比較了「狗與郵差」以及「意志堅定的獨木舟選手」兩類追逐問題之後，他發現這些都是微分方程的問題，至於它們的解之曲線軌跡，則可以想像成為譬如狗在追逐獵物時所行進的無限小步幅所組成。基於此作者評論說：「這種世界觀，即每件事物都可看成由無限微小的改變累積而成，是微積分最具革命性的洞見。弄清楚如何將這種想法轉變成可以操作的數學計算，是一項重大突破。」無論如何，「在探討追逐問題時，感覺上你就像是牛頓志同道合的好朋友」。

正如前述，第 3 章〈相對論〉（1977）的主題還是追逐問題。在作者寫給喬夫老師的第一封信中，討論了四隻狗的追逐問題之解法。此外，作者也透露他所以選擇進入普林斯頓大學，是因為愛因斯坦（曾經）就在那兒。不過，他的大學第一門數學課卻是讓他「完全挫敗，也改變了自我認知」：

那是一門幾乎全是證明的線性代數課。它鎖定的對象是那些將來有意主修數學的大一新生。那門課的用意是幫助學生習慣既嚴謹又抽象的數學——如果你想成為純數學家，那麼你就必須擅長這類事。那位教授，一個很有名的拓樸學家，相當害羞，以致於第一天進入講堂時，他就貼著牆壁走，彷彿希望自己成為隱形人。接下來一整個學期，他總是低著頭看著他的鞋子，並且不時拉扯自己的紅鬍子。有幾次我鼓起勇氣問他問題，他似乎嚇到了，只是簡單地回答「是」或「不是」。我自己讀課本、做作業，上課也很專心聽，但還是不知道他在上什麼課。那是很恐怖的經驗，不管我怎麼做，就是無法掌握課程內容。教科書很枯燥、講究細節，而且沒有任何圖示。作業令人困惑。至於測驗，只要想到考試，我就忍不住想往廁所跑。

這種徹底受挫的數學經驗，讓作者沮喪到考慮轉物理系。幸好，他升上大二碰到善於啟發學生的名師伊利亞斯·史坦（Elias Stein）講授複變函數論，¹他才繼續留在數學系主修。不過，此時家人（尤其擔任律師的哥哥）建議他轉向醫科。他在一番自我性向探索之後，態度終於軟化。然而，「這完全沒有道理」（irrational）！因為他就是想作一個數學家！本書第 4 章的主題〈無理數〉（1978-79），顯然就是在呼應他此時的心境。1979 年 2 月 20 日，在他寫給喬夫老師的這一封信中，作者運用古希臘畢達哥拉斯學派的可公度量概念，提供了

¹ 史坦是普林斯頓數學大師，徒弟中有兩名榮獲費爾茲獎，包括鼎鼎大名的陶哲軒，2006 年得主之一。

$\sqrt{2}$ 是無理數（事實上，是「不可公度量」(incommensurable)）的一個非傳統制式 (non-conventional) 的證法。² 作者認為傳統制式的這個「證明的邏輯非常嚴謹，但它有一點令人看不慣。除了它很迂迴之外，其論證也沒有針對主題，它讓 $\sqrt{2}$ 的無理性看起來像是數論上的定理，而非幾何學上的定理。我們剛剛開始所談到的那些幾何圖形（正方形、對角線及三角形），都到哪裡去了呢？」

作者所介紹的非制式證明，當然只用到幾何概念，儘管還是離不開歸謬法。這一段插曲，顯然意在引伸他原先打算放棄摯愛的數學，但是，在他與媽媽交心之後，決定回到數學的懷抱：「有些人從未找到他們的摯愛，但是藉由否定自己的摯愛，我反而找到了它，而且確信它才是我的摯愛。」

從第 5 章〈移位〉(1980-1989) 開始，作者與喬夫老師的關係有了微妙的變化：他生平第一次將喬弗瑞老師當成朋友，一個幾乎可以跟他平起平坐對談的朋友。類比這種移位，作者在 1981 年寫給喬夫老師的這一封信中，介紹他運用移位算符 (shift operator)，而找到費伯納西數列的一般項。這是一個十分簡單、但高度優雅的進路，值得我們鄭重推薦！

在第 6 章〈餐墊紙上的證明〉(1989.3) 中，作者提及他人生的一个重要路口：學業即將完成（1986 年他榮獲哈佛大學應用數學博士，旋即從事博士後研究三年），事業即將開展，而且還獲得 MIT 的助理教授職位。不過，在本章中，作者主要回答喬夫問他關於 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k}$ 以及與它相關的積分 $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}$ 的問題。此外，他們也討論了傅立葉級數、積分內微分、 Γ 函數（階乘函數 $n!$ 的延拓），以及其它相關問題。

在 1989-1990 年間，作者與喬夫老師之間的通信空前熱絡，而這正發生在他們師徒事業的黃金交叉點之際：喬夫正準備退休，而作者則開始大展宏圖，並與前妻伊莉莎白談戀愛。於是，作者利用（第 7 章標題）「和尚與山」的數學問題，來比喻「我們兩人此時是在同一個時間到達同一個地點，雖然各走各的旅程」。在本章中，作者討論的問題還有非線性振盪子，以及 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ 的計算問題。此外，在 1990 年春，他與學弟艾德·瑞克返回母校，擔任神秘嘉賓，祝賀喬夫老師榮獲該年之優秀教學「天鵝獎」。結果，作者致詞沒幾句話，即哽咽無法終場。

1990 年，正當作者與伊莉莎白訂婚後即出現危機時，他的母親突然去世，這對他的打擊甚大。在葬禮進行中，他甚至傷心欲絕，淒厲哭號。此時，喬夫老師的信函雖然隻字未提慰問之意（他們師徒的默契鮮少提及私事），還是為他帶來療傷的效果。喬夫除了與他分享幾個有關積分值的教學心得（譬如

² 作者特別聲明此一方法是普林斯頓葛洛斯 (Benedict Gross) 老師所告知。

$n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$ 與 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$) 之外，還跟他討論當時電視節目中相當熱門的蒙提·霍爾 (Monty Hall) 問題。作者則在回信中，說明了他如何計算

$$\int_0^{2\pi} (\cos \theta)^{2m} d\theta = \frac{2\pi(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}。$$

上一段是第 8 章〈隨機〉(1990-91) 主要內容。作者以隨機為標題，應該意在說明人世之無常，也多少呼應了他所討論的蒙提·霍爾問題。第 9 章的主題是〈無限與極限〉(1991)，本章一開始，作者就強調「微積分的偉大成就在於它馴服了無限大」，「微積分的創始者敢於面對無限大，因為他們別無選擇。甚至在還沒有掌握微積分的邏輯之前，他們就感覺到無限大，以及它的鏡像無限小，是解決那個時代是懸題的關鍵」。在此，他們師徒討論了研讀卡爾·博耶 (Carl Boyer) 《數學史》(A History of Mathematics) 所引述的一個無窮乘積之成立。³ 在這 1991 年的通信中，喬夫老師首度打破默契，輕輕地詢問作者訂婚的消息，之後又透露他幼兒接受癌症治療的消息。但是，作者「似乎決定繼續待在井然有序的數學世界裡」。因此，

我們這一回合通信的主題是「極限」與「無限大」，或許這並非純屬偶然。當我們兩個人心中正因為親人的離世或病痛悲傷時，或許我們很自然地都希望在那個「能讓無限大成為真實」的世界裡找到避難所。

現在，作者終於面臨了他學術生涯中的最關鍵轉折，可是，他卻選擇〈混沌〉(本書第 10 章)，來作為此一段時間 (1992-1995) 的標題。此時，作者面臨了與伊莉莎白的婚姻問題 (最後離婚收場)，以及他是否續留 MIT 的生涯抉擇。如果留下去，MIT 願意提升他為非終身職的副教授，如果他應康乃爾大學之聘，則可提前兩年獲得終身職。顯然，他對於 MIT 的最終無法賞識他的表現不無微詞，不過，他還是十分高興選擇了康乃爾。這個決定 (從 1994 年開始)，讓他在 1995 年與喬夫通信時，顯得十分滿意。

1999 年，作者應邀參加在紐約市舉辦的「慶祝教育之夜」，表彰 49 年教職的喬夫老師的教學成就。作者邀請 1998 年再婚的太太卡蘿一起與會，算是正式介紹給老師與師母。當晚，賓主盡歡，作者致詞不再「失態」，讓喬夫老師「福杯滿溢」，成為「教書生涯的一個最高點」。這是本書第 11 章〈慶祝〉(1996-1999) 的主題。

喬夫老師正式退休後，有一段時間顯然很難適應，他向作者透露：「你有沒有感覺到，我這個 72 歲的老頭，有那種害怕『自己』被衰老及阿茲海默症擄走

³ 這一本數學史著作是非常經典的入門書，目前仍廣受讀者閱讀與參考。

的憂慮」。這是本書第 12 章〈最快走下坡之路〉(2000-03) 的故事。其實，這個標題與喬夫向一位女服務生(很有耐性)解釋最速下降曲線有關，在另一封信裡，喬夫則討論了電台節目《車談》的某個扣應問題：如何製作刻度尺來量測一個圓柱形油槽的現有油量。

第 13 章的主題是〈分歧〉(bifurcation) (2004)。從數學觀點來看，這是作者在呼應第 10 章的〈混沌〉。作者首先指出：自然界的變化會出現劇烈性及不可預測性，因此，數學家必須發展出不同的數學工具來處理這些迥然相異的現象。「在溫和的一端，是一個系統遵照微分方程來做有次(秩)序的改變，而其中的物體則依據運動定律來滑行」。「與前者相對的另一個極端，則是狂野、不合理的改變。」「介於這兩個極端之間的是一些特別的系統，它們遵循某些規則，但那些規則又可能導致系統本身的瓦解，這聽起來有點自我矛盾。這些系統具有發生劇烈改變的潛力，然而，它們目前還處於休眠狀態，只需要輕輕一推，通常只是我們察覺不到的一點壓力變化，就足以將它們推落懸崖。我們這裡所談的是一個傾倒點，一個相變的臨界點，也就是壓斷駱駝脖子的那根稻草。這樣的轉變令人感到驚訝它同時合乎邏輯的要求。」作者特別指出與這現象有關的數學概念，稱為「分歧」，這是當系統的參數連續變化時，此一系統的行為卻不連續地變化。譬如，當你逐漸把溫度升高(定量的改變)，而系統內沒發生什麼事，但是，到了分歧點，鍋子就開始沸騰，而發生了定性的改變。

在人生的這個「分歧點」，喬夫在 2004 年 1 月寫信告知作者輕度中風的消息，作者沒有立即回信，主要是因為他的父親甫於去年 10 月過世。不幸，作者的哥哥也在 2004 年 4 月突然過世，得年 57 歲，過程與他媽媽相仿。聽到這個消息，喬夫寄來一張慰問卡。於是，作者立即撥電話給喬夫老師，並且約好 8 月去拜訪他，同時，希望老師談論一點他們師徒從未談論的私事。這趟探訪之旅讓作者師徒倆既興奮又緊張，難怪他太太卡蘿喜歡調侃他們這兩個男人的三十年情誼。

現在，是返璞歸真的時候了！本書最後一章(即第 14 章)主題〈海龍公式〉(2005-目前)。本書前面所討論的數學，都是關乎微積分或數學分析(只有 $\sqrt{2}$ 是無理數的證明例外)，沒想到他們師徒兩人在本書中所討論的最後一個定理，竟然是一個初等幾何的經典公式！這是 2007 年喬夫老師二次中風之前，與作者討論的主題。至於在書寫的比喻(metaphor)方面，作者運用了季諾(Zeno)的飛毛腿阿基里斯追逐烏龜悖論(paradox)。作者為了寫這一本書，他重新翻閱他與喬夫老師的通信內容，讓他「深切體會到『過去』正朝著『現在』進逼，一年接一年從背後追上來。身處於這個緩慢移動著的『現在』，喬夫和我就像兩隻被時間追逐的烏龜。」而所有這一切，都歸結到作者所領悟的人生智慧：「微積分所能馴服的改變，以及他所無法馴服的改變。他選擇正面去面對這一切：不只用

心智 (mind) 去面對它們 (像季諾一樣)，也用他的心 (heart) 去面對」。

三、評論

本書的數學解提及其說明 (或證明)，充分地見證了作者的數學洞察力，也足以顯示康乃爾大學的應用數學講座教授，絕非浪得虛名！事實上，有別於飛鷹 (eagle) 型的進路，作者是一位青蛙 (frog) 型的數學家，總是可以在泥淖中找到出路。吾人一旦掌握他的解法，就可以體會他穿透表象、直指核心的看家功夫。此外，作者的學養也極為博雅，我們只要瀏覽他在本書末所附的參考文獻，就可以略知一二。

事實上，作者在本書中最值得稱頌的創意，莫過於各章標題的擬定，以及相關數學概念的解說與文學比喻 (literary metaphor)。雖然這些不無可能多少來自本書英文版編輯的建議，但是，作者融微積分與人生於一體，卻是一般文字書寫者 (或一般文人) 難以攀登的高峰。同時，他運用三十年間與喬夫老師的數學通信，勾勒了他自己的大半輩子人生與功成名就的學術生涯。這種「五十自述」的書寫手法 (作者出生於 1959 年)，也令人大開眼界。

另一方面，作者刻意引述喬夫老師有關海龍公式之證明，以及介紹極有「品味」的 $\sqrt{2}$ 為無理數之證明，顯示他非常希望一般讀者也可以分享他那十分獨特的數學經驗。因此，缺乏微積分知識的一般讀者，應該也多少可以體會這些經驗分享的用心良苦才是。

總之，這是一本數學與敘事 (narrative) 完美結合的一本數學普及書籍。作者既寫數學，也寫人生，又綜合地 (synthetically) 與分析地 (analytically) 寫下他自己的數學人生。擁有豐富數學經驗的人，既領悟了數學創造或發明的美，又有能力將這種美的感受分享給他的閱聽人。這就是史蒂芬·史特格茲書寫本書的原初動機，他對數學經驗的詩意想像，為我們做了最深情的告白。

最後附記：中譯本有兩處誤植，請讀者注意：頁 55 的 (腳) 注 4 稱：1993 年懷爾斯證明費馬最後定理，此說不確，事實應該是：1994 年，懷爾斯在徒弟泰勒的協助下，成功地補上 1993 年證明版的邏輯漏洞，而完成了最後的證明。另一個在頁 58：英文書名 *The How and Why Wonder Book of the Atomic Energy* 應譯為《原子能的原理與應用的奇妙大書》，漏印了「原子能」三個字。

優秀數學科普作品的指標

評價方式：指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

1. 知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)

(1) 認識論面向 ☆☆☆☆☆

- (2) 方法論面向：☆☆☆☆☆
 - (3) 歷史或演化面向：☆☆☆☆☆
 - (4) 哲學面向：☆☆
 - (5) 教育改革面向：不適用
 - (6) 與自然科學、人文社會乃至生活經驗的連結：☆☆☆☆☆
2. 形式或表達 (Form or representation)
- (1) 創新手法：☆☆☆☆☆
 - (2) 數學知識的洞察力：☆☆☆☆☆
 - (3) 歷史事實的洞察力：☆☆☆☆☆
 - (4) 異文化的啟蒙意義：不適用
 - (5) 忠實可靠的參考文獻：☆☆☆☆☆
 - (6) 敘事的趣味性、可及性與一貫性：☆☆☆☆☆
 - (7) 中譯本的品質：☆☆☆
3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form)
- (1) 青少年層次：☆☆☆
 - (2) 一般社會大眾：☆☆☆
 - (3) 數學教師或數學通識大學生：☆☆☆☆☆
4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage)：

.....所謂的「混沌」(chaos)並不表示極端混亂，而是表示即使系統按照既定規則在運作，你仍然無法預期該系統的長期表現。為什麼不能呢？因為混沌系統極其靈敏。任何一點不被控制的擾動，如同大家常說「一隻蝴蝶的輕拍翅膀」，都可能被迅速地放大，使這個系統的表現與不受擾動的情形大相逕庭。當你嘗試作預期時，誤差就會呈指數成長模式，像滾雪球般迅速增大，使你的預測變成沒有意義。我們沒有任何辦法避開這問題；這和「儀器不夠精準」、「要更小心」或「等待更好的數學方法出現」沒有關係。混沌是真實世界無可避免的一部份。

這也像是當面打了科學家一巴掌。科學家，就和其他人一樣，一直都知道諸如人際關係、戰爭或歷史之類複雜事物可能是無法預測的。但以前一直以為至少我們還可以預測單擺的擺動，現在混沌這些東西也要奪走。(頁160)