

重視論證說理的數學公共理解： 推薦《桑老師的瘋狂數學課》

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

書名：桑老師的瘋狂數學課（*The Number Mysteries: A Mathematical Odyssey through Everyday Life*）

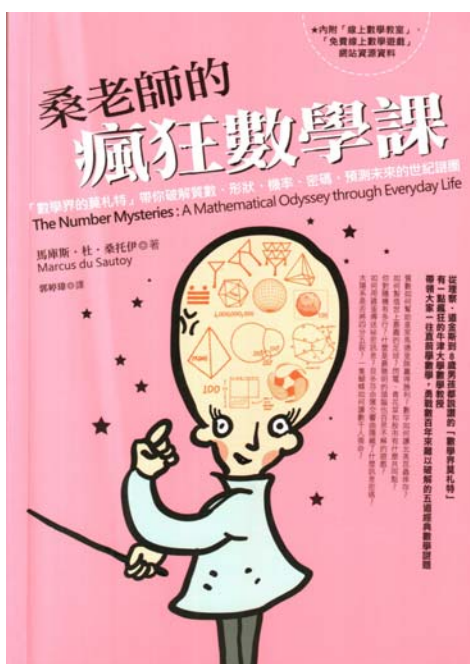
作者：馬庫斯·杜·桑托伊（Marcus du Sautoy）

出版社：臉譜出版社，台北市

出版資料：平裝，319 頁

出版年：2011

關鍵詞：英國科普、科普的全球化消費商品、數學新知、論證式的說明（*explanation with reasoning and argument*）



一、前言

《桑老師的瘋狂數學課》是怎樣的一本數學普及作品？這樣一位英國作者 Marcus du Sautoy 如何會注意到台灣廚師張鴻喻將拉麵(龍鬚麵)拉得更細更長：

2001 年，台灣廚師張鴻喻在兩分鐘內將麵條加倍了 14 次。最後麵條細到可以穿過針孔。這種「加倍」的力量，讓麵條可以從張先生位於台北市中心的餐廳延伸到市郊。切開的時候，共有 14,384 根麵條。

這就是「加倍」的力量，可以迅速產生很大的力量。例如，如果張鴻喻可以持續下去，把麵條長度加倍 46 次，麵條會和原子一樣細，長度足以從台北延伸到我們的太陽系外圍。把麵條長度加倍 90 次，可以從可觀測宇宙

的一邊到另一邊。要了解目前的質數紀錄有多大，必須把麵條長度加倍 43,112,609 次，然後拿掉 1 根麵條，就等於 2008 年發現的創紀錄質數。

誠然，本書是一本非常非常「另類的」數學普及作品。相較於喬治·史皮婁《數學的秘密生命》與《數字的秘密生命》來說，本書也提供數學新知，然而，它卻不厭其煩地說明其相關論證。

目前，Marcus du Sautoy 的數學普及著作被中譯的共有兩部：其一是《素數的音樂》(*The Music of the Primes*, 2003) 為簡體字版，由中國長沙市湖南科學技術出版社印行 (2007)，作者的名字被中譯為馬科斯·杜·索托伊。另一本則是剛剛中譯問世的《桑老師的瘋狂數學課》(*The Number Mysteries*, 2010) (台北：臉譜出版社，2011)，作者則被中譯為馬庫斯·杜·桑托伊。

在英國科普界，馬庫斯·杜·桑托伊的書寫位置可以比擬傑出數學家伊恩·史都華 (Ian Stewart)，英國皇家科學院院士。桑托伊是牛津大學數學系教授，2008 年，他繼任理查·道金斯 (Richard Dawkins) 為 Simonyi 講座教授 (Simonyi Professorship Chair for the Public Understanding of Science)，主要任務是促進科學的大眾理解。2009 年，皇家學會在 2009 年頒贈法拉第獎 (Faraday Prize) 給他，表彰他在大眾傳播科學方面的傑出貢獻。還有，2010 年他更是榮獲大英帝國官佐勳章。

其實，有鑑於《哈利波特》的全球暢銷熱潮，英國顯然在高等教育商品 (例如：全面開放全球各地學生前往英國取得學士、碩士學位) 大力熱賣二十年之後，也積極推銷全球性的科普書籍。這或許也可以解釋何以像史都華、康威 (John Conway) 以及桑托伊這些傑出的數學家，會義無反顧地投入數學普及書寫。這些科普商品的價值當然值得肯定，水準也遠遠地高過平均值之上，然而，這些作品的背後，顯然有一個全球化資本主義邏輯在運作。這是我們有意藉此切入創意文化產業時，非常值得省思的一個消費文化面向。

二、內容簡介

本書除了前言與有關網站說明之外，共有五章，其目次依序如下：

- 第1章 耐人尋味的無窮質數
- 第2章 難以捉摸的的形狀的故事
- 第3章 連勝絕招的秘密
- 第4章 破解不了的密碼個案
- 第5章 解開預測未來的方程式

在本書的每一章中，作者都會帶領我們「展開一場重大數學主題的旅程」，並且在每章末，則「揭示一個迄今無人能解的數學謎題。這些都是自古未解的偉大問題」。事實上，作者在每章中都介紹一題鼎鼎大名的百萬美元問題，那些都是由美國富商克雷（Landon Clay）所提供。

第 1 章主題是質數，作者從一些非常有趣的題材切入，譬如英國足球金童貝克漢的球衣號碼 23、美洲蟬為什麼喜歡質數 17，如何利用兔子和向日葵找出質數，以及作者為何著迷於孿生質數 41、43 等等？最後，作者介紹百萬美元問題：赫赫有名的黎曼猜想（Riemann conjecture）。

第 2 章主題是形狀（shape）。在本章一開始，作者開宗明義引述伽利略所主張：宇宙大書是利用數學語言與符號（圖形）所寫成，緊接著指出：「本章將呈現自然中奇特和美妙形狀的全覽：從六角雪花到 DNA 螺旋，從鑽石的放射狀對稱到葉片的複雜性狀。為甚麼泡泡是完美的球形？人類如何製造出像人的肺臟如此錯綜複雜的形狀？我們的宇宙是甚麼形狀？數學是了解自然如何及為什麼製造如此形形色色的核心，他也賦予我們創造新形狀的力量，以及能夠指出何時不會再發現新形狀。」至於作者的切入點，則是諸如泡泡為何是球形？茶包形狀如何設計？北京奧運水立方建築的奧秘？閃電、青花菜和股市有何共同點？怎麼會有 1.26 維的形狀？等等問題。最後，作者提及有關我們三維宇宙的形狀之研究，以及所謂的龐加萊猜想（Poincare conjecture），已經在 2002 年被俄羅斯數學家佩雷爾曼（Gigori Perelman）所解決，不過，他先是拒絕了 2006 年象徵數學界最高榮譽的費爾茲獎，以及 2010 年克雷研究所（Clay Institute）所獎勵的百萬獎金。

在本書第 3 章中，作者說明「玩遊戲時邏輯和機率的教學如何幫你增加優勢。無論你是喜歡玩大富翁的假鈔或用真鈔賭博，數學往往是致勝的秘訣。但仍有一些簡單的遊戲，即使最聰明的腦袋也覺得百思不得其解。」至於與本章相關的百萬美元謎題，則是與圖論和電腦計算有關的 P vs. NP 問題（P versus NP problem）。作者以「旅行推銷員問題」（travelling salesman problem）為例，說明這一百萬元獎金主要徵求可以提供一種普遍適用的演算法或電腦程式，對於輸入該程式的任何地圖都能得出最短路徑，速度遠比用電腦執行窮舉搜尋來得快。推銷員可能的行程隨著城市數增加而呈指數成長，所以，窮舉法搜尋很快變得幾乎不可能。這是在 1971 年所提出來的計算機科學問題，大致來說，它詢問吾人利用電腦容易驗證（easy to check）的每一個問題，是否也同時容易被電腦所解決（easy to solve）。事實上，從本章所舉例題，我們可以發現這個百萬美元謎題呈現了極其多樣的風貌，譬如英超足球的勝負預測、派對安排以及地圖著色等等。

在第四章中，作者說明數學如何用以創造及破解一些最聰明的密碼，如何幫

助我們運用安全、有效率且秘密的方式傳遞資訊。除了密碼的歷史典故之外，作者也介紹了會自行偵錯的 ISBN、網路購物的加密如何與費馬小定理有關等等。至於與本章有關百萬美元獎金問題 — The Birch and Swinnerton-Dyer conjecture)，一則是由於它關連到提供新加密方法的橢圓曲線密碼學 (elliptic curve cryptography)。其實，作者在本章中還介紹一個具有 617 位數的自然數，目前無人可以確定它是否為一質數，可見因數分解有多難！

在第五章，作者說明為什麼數學方程式是最佳算命師。「它們能預測日蝕月蝕、解釋回力鏢為甚麼會飛回來，最後還告訴我們地球的未來。」本章最後以亂流問題結尾，並且說明這一問題如何影響貝克漢的自由球，乃至於飛機的飛行。而這些問題的根源則關連到另一個百萬美元的數學謎題 — Navier-Stokes equations (一個與亂流有關的偏微分方程式) 的求解。正如前幾章，作者在本章中所運用的，也都是些讀者相當耳熟能詳的例子，譬如數學如何拯救丁丁 (比利時漫畫《丁丁歷險記》的主角)？為什麼英超足球隊員魯尼每次凌空射門時都要先解一個二次方程式？如何像貝克漢般讓自由球轉向或向卡洛斯般讓球轉彎？等等。此外，作者還舉例說明「你可能以為大自然把自己區分成兩種，一是簡單、可預測的問題，像是比薩斜塔上落下的球，二是混沌、難以預測的問題，例如天氣。不過，劃分的界線並沒有這麼清楚。有時候，起出看似可輕易預測的問題，當細小處發生些微變動後，就會變得相當混沌」。

三、評論

本書在取材方面近於齊斯·德福林的《數學的語言》，然而，在就近取譬方面，則獨樹一幟，極具特色。我想作者最有貢獻的科普書寫，莫過於從最讓人耳熟能詳的消費文化現象，也可以談出一些數學的大道理來。同時，他也有能力並且相當樂意運用深入淺出的手法，為讀者提出證明 (proof) 或論證式的說明 (explanation with reasoning and argument)。這對於以科學 (或數學) 新知為主旨的科普書籍或雜誌來說，幾乎是不可思議的一件事，可見本書作者索托伊對於所謂的數學傳播 (mathematical communication) 之嚴肅態度，絕對是對於膚淺的科普文化的一記當頭棒喝。

事實上，作者也在他的〈前言〉中強調：「在這五個章節中，我將把數學帶進生活，說明一些最近才發現的偉大數學。我也會提供自我測試的機會，用一些未解的問題讓你挑戰歷史上最偉大的頭腦。最後，我希望你能了解，數學真的是我們所見所做的一切事物的核心。」

至就本書所涉及的數學主題或單元來說，則多半是科普作家最夯的主題或單元：質數、特殊立體 (譬如茶袋形狀設計)、碎形、密碼、機率 (與賭博) 以及克雷的百萬美元問題等等，其中與質數主題有關者，更是佔了極大篇幅，頗能呼

應作者的那一本《素數的秘密》。

再就一個出版品來說，本書有許多巧思非常值得我們注意。首先，本書有專設網站，此外，本書所提到的外部網站頗為多元，其中除了作者的專屬網站之外，也包括一些數學的進修課程、數學線上遊戲、免費足球遊戲（可用以預測下一季英超戰果）以及牛津大學 M3 團隊所提供的資訊。當然，作者也沒有忘記推薦目前最夯的數學家傳記網站（由英國 St. Andrews 大兩位學數學家所經營）。針對這些網站，作者也在本書羅列行動條碼（WR code），供智慧型手機直接掃描連結。

勘誤或修訂建議：頁 129 的「拓撲學」應譯為「拓樸學」(topology)。頁 146-147 中的 g_N ， g_{N-1} 以及 g_{N-2} 都必須依序訂正為 g^N ， g^{N-1} 以及 g^{N-2} 才對。頁 249 中的費馬小定理應該是 $A^p \equiv A \pmod{p}$ ，而非 $Ap = A \pmod{p}$ 。不過，本書英文版 p. 199 中的 $(p-1)! = (p-1) \times Ap^{-1} \pmod{p}$ 卻必須訂正為 $(p-1)! = (p-1)! A^{p-1} \pmod{p}$ 才正確。又本書在〈時鐘計算是什麼？〉這一節未標示同餘 (congruence) 記號 \equiv ，不知何故？頁 261 中的「兩」字誤植，應改為「利用費馬所發現的一個方法」。至於頁 270-271 有關伽利略的比薩斜塔實驗，則與史實不符。精確地說，這個實驗是否曾經執行，我們無法確定。此外，作者有關下列插曲之說明，也與史實不符：伽利略十七歲那年在比薩大教堂內望彌撒時，「正好看到隨著吹進教堂的微風輕微擺盪的水晶燈」，而發現鐘擺的擺動週期與擺錘長度的關係之公式（頁 283-284）。其實，伽利略是否由此一「插曲」而發現此一公式，由於缺乏可靠的史料，我們也無法確定。另一方面，有關頁 273 中的食譜 (recipe)「即為如何處理這些數字的一組數學說明」，則是指依樣畫葫蘆的操作指示，就像按照食譜來做菜一樣，因此，如果這個食譜加個引號變成「食譜」，會比較接近原意一點。

優秀數學科普作品的指標

評價方式：指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

1. 知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)

- (1) 認識論面向 ☆☆☆☆
- (2) 方法論面向：☆☆☆☆
- (3) 歷史或演化面向：☆☆☆☆
- (4) 哲學面向：☆☆
- (5) 教育改革面向：不適用
- (6) 與自然科學、人文社會乃至生活經驗的連結：☆☆☆☆

2. 形式或表達 (Form or representation)

- (1) 創新手法：☆☆☆☆
 - (2) 數學知識的洞察力：☆☆☆☆
 - (3) 歷史事實的洞察力：☆☆☆☆
 - (4) 異文化的啟蒙意義：☆☆☆☆
 - (5) 忠實可靠的參考文獻：☆☆
 - (6) 敘事的趣味性、可及性與一貫性：☆☆☆☆
 - (7) 中譯本的品質：☆☆☆
3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form)
- (1) 青少年層次：☆☆☆
 - (2) 一般社會大眾：☆☆☆
4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage)：

我在書中陳述的數學，從簡單到困難的都有。每章結尾的未解問題，困難到沒有人知道如何解開。但我堅決相信應該讓人們接觸一些數學的大觀念 (big idea)。讀莎士比亞或史坦貝克 (John Steinbeck)，會讓我們對文學感到興奮。第一次聽到莫札特或爵士樂大師戴維斯 (Miles Davis)，會讓我們對音樂興致勃勃。要親自演奏莫札特困難重重，讀莎士比亞也往往是艱鉅的考驗。但那不表示應該把這些偉大的思想家的成果保留給鑑賞家。數學亦然。因此，如果你覺得數學很艱澀也沒關係，只要享受你能瞭解的，並回想第一次讀莎士比亞的感覺。(頁 8-9)

波洛克 (Jackson Pollock) 在 1943 年開始創作碎形圖畫。他的早期畫作碎形維度約 1.45，近似挪威峽灣的維度值，但隨著他的技巧發展，碎形維度逐漸提高，反映出他的畫作變得愈形複雜。波洛克最後幾幅滴畫 (drip painting) 作品之一，名為《藍棒》(Blue Poles) 的畫作費時六個月才完成，碎形維度是 1.72。

心理學家探究了人們覺得賞心悅目的形狀。碎形維度介於 1.3 和 1.5 之間的圖像向來比較吸引我們注意，許多自然中發現的形狀便類似這個維度。的確我們大腦之所以受到這些類型的碎形吸引，可能有演化上的重要原因，因為大腦已經根深蒂固地認為這些碎形代表我們順利通過周遭激烈的生存競爭。或者因為，就像最棒的音樂介於乏味的電梯音樂 (lift music) 與隨機的白噪音 (white noise) 兩個極端之間某處，這些形狀的複雜度位於太規律與太隨機之間，所以吸引我們。(頁 117-118)

笛卡兒的字典裡，一邊是形狀和幾何，另一面是數字和座標。麻煩的是，如果描述三維以上的形狀，視覺部份就不管用了，因為沒有有形的第四維可以讓我們看見更高維度的形狀。笛卡兒字典之美，就在於字典的另一邊可以繼續下去。要描述四維物體，只需要加上第四個座標，記錄我們在這個新方向移動多少距

離。所以儘管我們無法建造四維立方體實體，但還是可以用數子精確描述它。(頁 121)

數學家就像畫家或詩人一樣是模式的製造者。如果他的模式比畫家或詩人〔來〕的永恆，那是因為它們是用思想創造出來的。數學家創造的模式，就像畫家或詩人的模式一樣，必須是美麗的；思想〔理念〕一如顏色或文字，必須以和諧的方式彼此扣合。美是第一考驗：醜陋的數學在這世上找不到永恆之所。(頁 260，引自 Hardy)